Messung und Reduktion

Michael Zirpel (mzirpel@qlwi.de)

Das *Reduktionspostulat* (auch als *Projektions-* bzw. *Kollapspostulat* bezeichnet) beschreibt die Zustandsänderung eines quantenmechanischen Systems durch eine Messung. Es wird hier gesondert behandelt, da es nicht für alle Interpretationen einen Bestandteil der QM darstellt (z.B. kommen Ludwig [1983], Ballentine [1998] und Bohm [1952] ohne dieses Postulat aus).

Da es sich ausschließlich auf Messungen bezieht, ist es sinnvoll, dieses Postulat *innerhalb* der *Minimalinterpretation* der QM zu behandeln. Das heißt aber nicht, dass es auch notwendiger Weise ein Bestandteil dieser Minimalinterpretation ist, wie die bereits erwähnten Beispiele von Ludwig [1983] und Ballentine [1998] zeigen. Es wird allerdings als ein wesentlicher Bestandteil der *Kopenhagener Interpretation* der QM (vgl. Heisenberg [1956]) gesehen, der eng mit einem weiteren Punkt der derselben verbunden ist: Alle Messinstrumente müssen - genauso wie die Präpariervorrichtungen - im Endeffekt *klassisch* beschrieben werden.

v. Neumann [1932] hat das Reduktionspostulat erstmalig als eigenständiges Postulat aufgeführt, das von Lüders [1951] präzisiert wurde.[1] Die v. Neumann/Lüders-Form des Postulats beschreibt ausschließlich wiederholbare Messungen. Schon Pauli [1933] wies auf nicht-wiederholbare Messungen hin, die exakte Ergebnisse liefern können. Mittlerweile sind verallgemeinerte Messungen unscharfer Observablen weithin akzeptierter Bestandteil des Kanons. Für all diese Fälle kann eine verallgemeinerte Reduktionsregel angeben werden (wie z.B. in Nielsen and Chuang, 2000), bei der dann aber das Reduktionsergebnis nicht nur von der gemessenen Observable sondern auch von der jeweiligen Messmethode abhängt.

Nach der ausführlichen Darlegung des Reduktionspostulats in Abschnitt 1 gibt die Behandlung des Messprozesses nach v. Neumann in Abschn. 2 eine Basis für das tiefere Verständnis der Zusammenhänge. In Abschn. 3 wird gezeigt, dass auch nicht-wiederholbare Messungen exakte Ergebnisse liefern können, und wie eine Reduktionsregel für verallgemeinerte Messungen unscharfer Observablen begründet werden kann. In Abschn. 4 kann man sehen, dass der Kollaps im Messprozess nicht durch die unitäre Dynamik zustande kommen kann. In Abschn. 5 wird gezeigt, wie es möglich ist, innerhalb der Minimalinterpretation auch ohne Reduktion oder Kollaps auszukommen. In Abschn. 6 wird gezeigt, wie die Dekohärenztheorie das in der Kopenhagener Interpretation geforderte Klassisch-Sein der Messinstrumente sowie die Irreversibilität der Messung zu erklären versucht.

1 Reduktion als Postulat

Die im vorigen Kapitel skizzierte Minimalinterpretation ermöglicht es, die Aussagen der Theorie im Experiment zu überprüfen. Kernstück dieser Minimalinterpretation ist die Bornsche Regel. Da sich das Projektionspostulat direkt daran anschließt, wiederholen wir diese hier in der passenden

[1] Das Postulat wird oft v. Neumann [1932] zugeschrieben, der es wohl als erster explizit formuliert und die Konsequenzen erörtet hat. Überlegungen zur Reduktion von Wellenfunktionen finden sich aber auch schon vorher (z.B. bei Heisenberg, 1927). Die allgemeine Form des Postulats, die auch die Messung entarteter Observablen korrekt beschreibt, geht hingegen auf Lüders [1951] zurück.

Form. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Observable $A \in \mathscr{O}$ ein diskretes[2] Eigenwertspektrum $\sigma(A) = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq \mathbb{R}$ besitzt, d.h.

$$A = \sum_{a \in \sigma(A)} a P_a$$

wobei $P_a = P_A(\{a\})$ das projektionswertige Maß der Borelmenge $\{a\}$ darstellt bzw. den Projektionsoperator auf den Eigenraum von A für den Eigenwert a.

1.1 Bornsche Regel

Die Wahrscheinlichkeit, im Zustand $W \in \mathscr{S}$ den Eigenwert $a \in \sigma(A)$ der Observablen A zu messen, ist[3]

$$p_{A,W}(\{a\}) = \mathrm{tr}(P_a W)$$

1.2 v. Neumann/Lüders-Projektionspostulat

Wenn bei einer Messung der Observablen A im Zustand $W \in \mathscr{S}$ der Eigenwert $a \in \sigma(A)$ gemessen wird, so ist der Zustand des Systems direkt nach der Messung[4]

$$W_a = \frac{1}{\mathrm{tr}(P_a W)} P_a W P_a$$

1.3 Wiederholbarkeit und reine Zustände

Bereits die Bornsche Regel impliziert, dass ein bestimmter Wert aus dem Spektrum der Observablen gemessen wird. Das Projektionspostulat fordert darüber hinaus eine Zustandsänderung am gemessenen System, die im Experiment natürlich nur dann eine Rolle spielt, wenn weitere Messungen an dem gleichen System[5] durchgeführt werden.[6]

Ist der Zustand W rein, so ist es auch der Zustand W_a, und man kann mit Zustandsvektoren ψ, ψ_a vor bzw. nach der Messung auch schreiben

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{\langle \psi, P_a \psi \rangle}} P_a \psi$$

[2]Für Observablen mit kontinuierlichem Spektrum gibt es keine wiederholbaren Messungen (vgl. Busch et al., 1991). Deshalb klammern wir diese im Folgenden aus.

[3]Die hier verwendete Form der Bornschen Regel ist eine Spezialisierung für Observablen mit reinem Eigenwertspektrum. Im vorigen Kapitel haben wir eine allgemeinere Formulierung verwendet, die auch für Observablen mit kontinuierlichen Spektrum geeignet ist.

[4]Geht man davon aus, dass sich der Zustand des Systems $W(t)$ nach Vollendung der Messung zum Zeitpunkt t_M mindestens für eine kurze Zeitspanne s im Sinne der Normtopologie stetig entwickelt, sodass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zeitspanne $\tau > 0$ mit $\tau < s$ gibt, in der $\left\| W(t_M + \tau) - W(t_M) \right\| < \varepsilon$, dann ist der Zustand direkt nach der Messung näherungsweise $W(t_M)$.

[5]Bei zusammengesetzten Systemen ist dabei das Gesamtsystem zu betrachten, auch wenn die Messungen nur an einzelnen Teilsystemen durchgeführt werden.

[6]Für die Ensemble-Interpretation gibt es allerdings ein Problem: Zustände werden nicht mit individuellen Systemen, sondern mit Ensembles verbunden. Der Zustand des Systems nach der Messung des Wertes a kann aber als ein neues Ensemble interpretiert werden, das nach der Messung durch *Selektion* aller Systeme, an denen der Wert a gemessen wurde, aus dem alten Ensemble hervorgeht. Dies entspricht dem experimentellen Vorgehen z.B. bei der Datensammlung mit Hilfe der Koinzidenzmethode Bothe [1954].

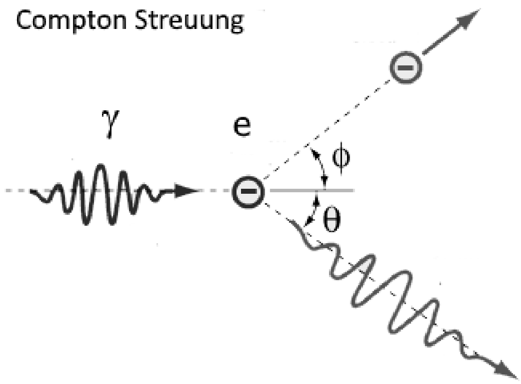
wobei ψ_a ein Eigenvektor von A zu Eigenwert a ist. Man bezeichnet die Zustandsreduktion in dieser Form auch als *Kollaps der Wellenfunktion*[7]

Der Zustand nach der Messung W_a ist ein Eigenzustand der Observablen A zum Eigenwert a. Man bezeichnet diese Form der Messung daher auch als *projektiv*. Eine sofortige Wiederholung der Messung liefert mit Sicherheit das gleiche Ergebnis a sowie erneut den gleichen Zustand W_a. Die Messung ist daher *wiederholbar* (bei Pauli [1933] "*Messung erster Art*"). Implizit wird dabei vorausgesetzt, dass es sich um eine exakte Messung handelt (bei Pauli "*ideale* Messung").

Wenn man nicht-wiederholbare, nicht-projektive oder nicht-ideale Messungen ebenfalls in Betracht zieht, sollte im Postulat die Art der Messung durch ein entsprechendes Adjektiv eingeschränkt werden. Allerdings hat das Postulat dann eher die Form einer Definition.

1.4 Experimentelle Begründung: Compton-Simon Experiment

Das Musterbeispiel, das v. Neumann (1932, III.3.) zur Begründung des Projektionspostulats diskutiert, ist das Compton-Simon-Experiment (vgl. Compton, 1927): Bei der Bestrahlung einer Folie mit gerichteten Gamma-Strahlen werden Elektronen herausgeschlagen. Für die einzelnen Stoßvorgänge gilt der (relativistische) Energie/Impulserhaltungssatz: Die Summe der Energien und Impulse des Elektrons und des Gammaquants vor und nach dem Stoß sind gleich. Die Austrittsrichtung des Elektrons ist dadurch nicht festgelegt, das Gammaquant muss aber in die passende Richtung und mit der passenden Energie (bzw. Frequenz) abgelenkt werden, um die Energie- und Impulserhaltung zu gewährleisten. Dies lässt sich durch entsprechende Messungen am Gammaquant und am Elektron verifizieren. Compton und Simon fotografierten entsprechende Spuren in einer Wilsonschen Nebelkammer; Bothe und Geiger (vgl. Bothe and Geiger, 1925, Bothe, 1954) zählten Koinzidenzen an zwei entsprechend ausgerichteten Teilchendetektoren.



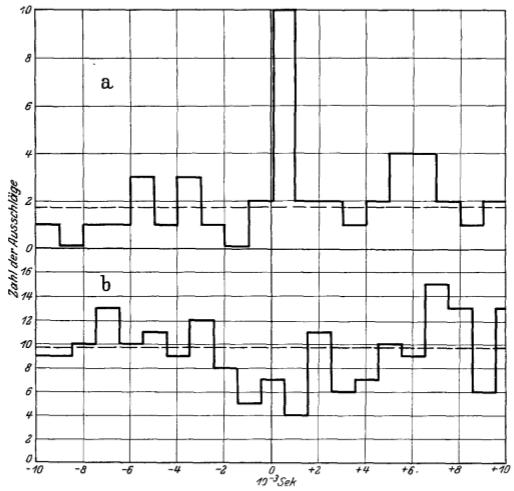


Fig. 8. Verteilung der Abstände zwischen e- und $h\nu$-Ausschlägen
a: Versuchsgruppe III. b: Blindversuch 13 d.
– – – – Mathematische Erwartung bezogen auf $^1/_{1000}$ Sekunde.

v. Neumann betrachtete das Experiment als die Durchführung zweier aufeinanderfolgender Messungen an *einem* System, nämlich dem Gesamtsystem Gammaquant-Elektron und folgerte, dass die erste Messung zur Reduktion des Zustands führt, sodass das Ergebnis der zweiten Messung durch den neuen Zustand determiniert ist, wobei die tatsächliche Reihenfolge der Messungen keine Rolle spielt[8].

[7]Der Begriff *Kollaps* deutet auf eine ontische Interpretation der Wellenfunktion hin. Bei einer epistemischen Interpretation wird eher von *Reduktion* gesprochen.

[8]Energie und Impuls sind bei der freien Bewegung nach dem Stoß Erhaltungsgrößen. Des weiteren werden Observablen verschiedener Teilsysteme gemessen, die daher alle kommutieren.

1.5 Zustand nach der Messung, (In-)Determinismus und Irreversibilität

Das Reduktionspostulat enthält die *Bedingung*, dass der Wert a gemessen wurde, und postuliert daher mit W_a implizit *bedingte Wahrscheinlichkeiten* für die Ergebnisse weiterer möglicher Messungen in einem zusammengesetzten Experiment, z.B. für das Ergebnis b einer weiteren Messung der Observablen B mit dem PVM $P_B(\{b\}) = P_b$

$$p(\{b\}|\{a\}) = \mathrm{tr}(P_b W_a) = \frac{\mathrm{tr}(P_b P_a W P_a)}{\mathrm{tr}(P_a W)}$$

Der Zustand nach der Messung W' ohne diese Bedingung, also ohne Annahme des Ergebnisses a, ist eine Mischung aller möglichen Zustände W_a bzw. ψ_a für alle möglichen Ergebnisse $a \in \sigma(A)$, wobei die statistischen Gewichte gerade durch die Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse gegeben sind

$$W' = \sum_{a\in\sigma(A)} p_{A,W}(\{a\}) W_a = \sum_{a\in\sigma(A)} \mathrm{tr}(P_a W) W_a = \sum_{a\in\sigma(A)} P_a W P_a \tag{1.1}$$

Dies entspricht dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$p(\{b\}) = \sum_{a\in\sigma(A)} p(\{b\}|\{a\}) p(\{a\})$$

denn

$$p(\{b\}) = \mathrm{tr}(P_b W') = \mathrm{tr}(P_b \sum_{a\in\sigma(A)} P_a W P_a) = \sum_{a\in\sigma(A)} \frac{\mathrm{tr}(P_b P_a W P_a)}{\mathrm{tr}(P_a W)} \mathrm{tr}(P_a W)$$

Der Zustand W' beschreibt das System nach einer Messung, wenn das Ergebnis nicht bekannt ist, z.B. bei der Vorhersage künftiger Messungen. Man kann die Mischung daher epistemisch interpretieren: in der Realität liegt einer der Zustände W_a (mit der Wahrscheinlichkeit $p_{A,W}(\{a\})$) vor, man weiß bloß noch nicht welcher. Der Zustand W' ergibt sich aber auch auf anderem Weg in der theoretischen Behandlung des Messprozesses (s. Abschn. 2.5).

Auch aus einem reinen Zustand W vor der Messung entsteht auf diese Weise nach der Messung eine Mischung W' (aus Eigenzuständen von A), wenn nicht W nicht bereits ein Eigenzustand von A ist. Für die Entropie gilt dabei

$$S(W') \geq S(W)$$

wobei Gleichheit gilt, wenn W bereits ein Eigenzustand von A ist.

Der Zustandsübergang $W \to W_a$ ist i.A. *weder deterministisch noch reversibel*: Jedes $a \in \sigma(A)$, für das die Wahrscheinlichkeit $p_{A,W}(\{a\}) = \mathrm{tr}(P_a W)$ größer als 0 ist, kann gemessen werden; der zugehörige Endzustand W_a tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Andererseits können verschiedene Zustände vor der Messung das gleiche Messergebnis a und damit auch den gleichen Zustand W_a zur Folge haben.

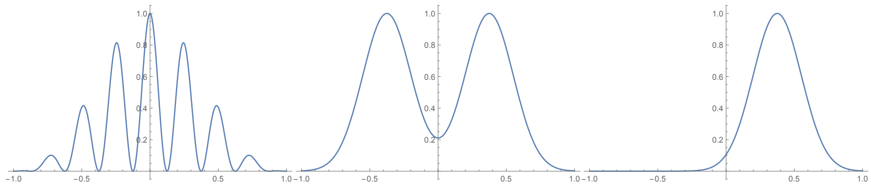
Beispielsweise können mit den reinen Eigenzuständen ψ_{a_1}, ψ_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$, die orthogonalen Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{a_1} + \psi_{a_2})$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{a_1} - \psi_{a_2})$ beide den Zustand ψ_{a_2} (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) zur Folge haben.

Der Zustandsübergang $W \to W'$ ist dagegen *deterministisch aber i.A. nicht reversibel.* Durch W und A ist aufgrund von (1.1) der Zustand W' eindeutig bestimmt. Verschiedene Zustände vor der Messung können aber den gleichen Zustand W' zur Folge haben.

Beispielsweise haben die reinen Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{a_1} + \psi_{a_2})$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{a_1} - \psi_{a_2})$ beide den gemischten Zustand $W' = \frac{1}{2}P_{[\psi_{a_1}]} + \frac{1}{2}P_{[\psi_{a_2}]}$ zur Folge.

Man bezeichnet den Übergang $W \to W_a$ auch als selektive Messung[9], den Übergang $W \to W'$ dagegen als nicht-selektiv.

Beide Übergänge stellen messbare Zustandsänderungen dar, wenn nicht von vorneherein ein Eigenzustand vorliegt. Dies kann man z.B. im Doppelspaltexperiment sehen. Die Interferenzen verschwinden, wenn die Superposition der beiden Teilwellen durch eine Messung des Spaltes (analog zum letzten Beispiel) in eine Mischung umgewandelt wird. Ohne Selektion nach dem Messergebnis erhält man dabei eine 2-Höcker-Verteilung, mit Selektion dagegen einen Höcker hinter dem selektierten Spalt.



Die Irreversibilität dieser Zustandsübergänge wird oft mit der Irreversibilität eingetretener Fakten in Zusammenhang gebracht: Jedes tatsächlich im Labor gemessene und aufgezeichnete Ergebnis stellt ein Faktum dar, das nicht mehr rückgängig gemacht werden kann (vgl. v. Weizsäcker, 1985).

Die zwangsläufige Veränderung des Zustands durch Messungen spielt eine wichtige Rolle in der technischen Anwendung durch die Quantenkryptographie, weil dadurch Abhörversuche erkannt und verhindert werden können (z.B. beim BB84-Protokoll s. Nielsen and Chuang [2000]).

1.6 Sequentielle Messungen, Kommutativität und Unbestimmheitsrelation

Werden kommutierende Observablen A,B sofort nacheinander wiederholbar gemessen mit den Messergebnissen a,b, so ergibt sich nach den Messungen ein gemeinsamer Eigenzustand

$$W_{ab} = \frac{1}{\operatorname{tr}(P_b P_a W)} P_b P_a W P_a P_b$$

Die Reihenfolge der Messungen spielt wegen der Kommutativität von A,B bzw. P_a, P_b keine Rolle. Bei weiteren sofortigen Wiederholungen der Messungen werden mit Sicherheit wieder die gleichen Ergebnisse a,b gemessen. Man kann diese Nacheinanderausführung auch als gemeinsame, wiederholbare Messung von A und B in einem *gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum* $(\sigma(A)\times\sigma(B), \mathscr{B}(\sigma(A)\times\sigma(B)), p_{W,AB})$ deuten, in dem alle borelmessbaren Funktionen $f : \sigma(A)\times\sigma(B) \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto f(a,b)$ von A und B als Zufallsvariablen dargestellt werden können. Die Marginalverteilungen der Messergebnisse für A und B sind die gleichen wie bei exklusiven Messungen der Einzelobservablen, z.B.:

$$p_{W,A}(\{a\}) = \operatorname{tr}(P_a W) = \sum_{b\in\sigma(B)} p_{W,AB}((a,b)) = \sum_{b\in\sigma(B)} \operatorname{tr}(P_a P_b W)$$

Bei nicht-kommutierenden Observablen ist dies i.A. nicht möglich. Ohne gemeinsame Eigenzustände variieren die Messergebnisse mit der Reihenfolge der Messungen und streuen bei Wiederholungen.

Dies sieht man beispielsweise, wenn man sequentielle Orts- und Impulsmessungen für endliche Intervalle betrachtet. Wenn $P_{\delta X}$ der Projektionsoperator auf ein Ortsintervall der Größe δ_X ist, so gilt nach einer positiven Messung (d.h. Messergebnis 1) für die Streuung des Orts im reduzierten Zustand W_{δ_X} nach der Messung $\sigma_X \le \delta_X$, da es sich um einen Eigenzustand von $P_{\delta X}$ handelt. Wird an diesem Zustand W_{δ_X} der Projektionsoperator $P_{\delta P}$ auf ein Impulsintervall der Größe δ_P positiv gemessen, so gilt dann für den reduzierten Zustand $W_{\delta X,\delta P}$ nach der Unbestimmtheitsrelation $\sigma_X \ge \frac{\hbar}{2}\delta_P$. Der Ort

[9] In der Ensemble-Interpretation entspricht der Übergang $W \to W_a$ der Bildung eines neuen Subensembles: nämlich das Ensemble aller Systeme, bei denen der Wert a gemessen wurde, während $W \to W'$ nur eine Transformation des bestehenden Ensembles darstellt.

streut also nach der Impulsmessung umso stärker, je kleiner δ_P ist, auch wenn vor der Impulsmessung die Streuung kleiner als δ_X war. Entsprechendes gilt umgekehrt, wenn die Reihenfolge der Messungen vertauscht wird. Die Impulsmessung verändert offensichtlich die Ortsverteilung. Man spricht auch von einer Störung durch die Impulsmessung und kann dafür ebenfalls eine "Unschärferelation" angeben (vgl. Busch et al. [2007]).

In Spurdetektoren für Teilchen kann man, wie bereit im letzten Kapitel angeführt, einen ähnlichen Effekt beobachten: Je höher die Auflösung der Ortsmessungen ist, desto mehr wird die uspründliche Teilchenbahn in eine zufällige Zickzackbewegung überführt, da der Impuls immer stärker streut.

Zwar kann man für die Messergebnisse auch in diesem Fall einen Wahrscheinlichkeitsraum des Gesamtexperiments angeben, allerdings stimmen die Marginalverteilungen der nicht-kommutierenden Observablen dann nicht mit den Verteilungen für exklusive Messungen der Einzelobservablen überei, wie man es im Beispiel an den unterschiedlichen Streuungen der Ortsmessung sieht.

1.7 Verallgemeinertes Reduktionspostulat

Das Projektionspostulat nach v.Neumann/Lüders setzt wiederholbare Messungen voraus und ignoriert nicht-wiederholbare Messungen, die durchaus exakte Ergebnisse liefern können. Pauli führte schon [1933] die Unterscheidung von *idealer Messung erster Art* (exakte Ergebnisse, wiederholbar) und *idealer Messung zweiter Art* (exakte Ergebnisse, nicht wiederholbar) ein. Mittlerweile sind auch verallgemeinerte Messungen unscharfer Observablen akzeptiert, sodass eine verallgemeinerte Form des Postulats nötig ist, wenn man die Reduktion bei all diesen Messungen korrekt beschreiben will.

Nielsen and Chuang [2000] geben eine Form an, die einfach aus der Theorie des Messprozesses deduziert werden kann (s. Abschn. 3): Für jedes diskrete POVM $\{E_k \in \mathscr{E}(\mathscr{H})\}_k$ existieren *Messoperatoren*[10] $M_k \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ mit $E_k = M_k^\dagger M_k$, die eine Messung des POVM beschreiben. Tritt bei einer Messung, die durch die Operatoren $\{M_k \in \mathscr{L}(\mathscr{H})\}_k$ beschrieben wird, im Zustand $W \in \mathscr{S}$ der Effekt $E_j = M_j^\dagger M_j$ ein, so ist der Zustand des Systems nach der Messung

$$W_j = \frac{1}{\mathrm{tr}(M_j^\dagger M_j W)} M_j^\dagger W M_j$$

bzw. ohne Konditionierung auf ein bestimmtes Ergebnis

$$W' = \sum_j \mathrm{tr}(M_j^\dagger M_j W) W_j = \sum_j M_j^\dagger W M_j$$

Die Messoperatoren $\{M_k \in \mathscr{L}(\mathscr{H})\}_k$ sind allerdings durch das POVM $\{E_k \in \mathscr{E}(\mathscr{H})\}_k$ nicht eindeutig bestimmt. Sie hängen von der Messmethode bzw. der konkreten Messapparatur ab. Dies gilt daher auch für den Zustand des Systems nach der Messung.

Da Observablen durch ein PVM gegeben sind, umfasst diese Reduktionsregel auch das obige v. Neumann-Lüders-Projektionspostulat: Für wiederholbare Messungen der Observablen A sind die Messoperatoren gerade die Projektionsoperatoren $P_a = M_a = M_a^\dagger = M_a^2$, sodass sich aus der verallgemeinerten Reduktionsregel die v. Neumann-Lüdersche Regel als Spezialfall ergibt.

Weiterhin gilt: Ist die Messung eines POVMs für alle Zustände wiederholbar, so sind die Messoperatoren eindeutig bestimmt: es handelt sich um orthogonale Projektionsoperatoren eines PVM. Wiederholbare Messungen mit dem v. Neumann/Lüdersche Projektionspostulat können also als idealisierter Grenzfall einer verallgemeinerten Messung verstanden werden.

1.8 Bemerkungen

Wie v. Neumann (1932, V.1.) erörterte, gibt es in der Quantenmechanik grundsätzlich zwei verschiedene Arten der *Zustandsänderung*, nämlich durch

1. durch (selektive) *Messung* eines Wertes nach dem Reduktionspostulat: diskontinuierlich, indetermistisch, irreversibel

[10]Es handelt sich dabei um Krausoperatoren (vgl. Abschnitt über offene Systeme)

2. durch die *unitäre Dynamik* nach der Schrödingergleichung: kontinuierlich, deterministisch, reversibel

Der irreversible, aber deterministische Übergang durch eine nicht-selektive Messung wird bei v. Neumann nicht erwähnt. Die Frage, inwieweit der Zustandsübergang durch Messung auf die unitäre Dynamik zurückgeführt werden kann, werden wir weiter unten in der Theorie des Messprozesses diskutieren.

Wenn Messgeräte als klassische Systeme betrachtet werden müssen, wie es in der Kopenhagener Interpretation immer verlangt wird, stellt sich die Frage, wie sich die Wechselwirkung eines quantenmechanischen Systems mit einem klassischen Messinstrument gestaltet. Bornsche Regel und Reduktionspostulat können diese Lücke zumindest teilweise füllen: Das klassische Messinstrument wird entsprechend der Bornschen Regel durch das quantenmechanische System in einen bestimmten Zeigerzustand versetzt, das quantenmechanische System nach der Kollapsregel in den entsprechenden Eigenzustand; beides erfolgt mit der durch die QM vorgegebenen Wahrscheinlichkeit.

Dabei wird dies oft wesentlich allgemeiner verstanden, als es es der Begriff Messung zum Ausdruck bringt, z.B. bemerken Landau-Lifschitz: “Unter einer Messung versteht man in der QM jeden Wechselwirkungsprozess zwischen einem klassischen und einem Quantenobjekt, der unabhängig von irgendeinem Beobachter abläuft.”

Die Nützlichkeit beider Postulate für technische Anwendungen quantenmechanischer Systeme innerhalb klassischer Maschinen ist damit offensichtlich. Im Gegensatz zur Bornschen Regel ist aber sowohl die Gültigkeit als auch die Notwendigkeit des Reduktionspostulats umstritten:

- Die übliche v. Neumann/Lüders-Form des Reduktionspostulats gilt nur für wiederholbare Messungen. Will man das Postulat in dieser traditionellen Form korrekt formulieren, stellt sich die Frage, inwieweit es über die Definition einer wiederholbaren Messung hinausgeht.

- In allgemeingültigen Reduktionsregeln für nicht-wiederholbare Messungen hängt das Reduktionsergebnis von der Messmethode ab. Es stellt sich dann die Frage, welchen Nutzen und welche Tragweite ein Reduktionspostulat hat.

- In der quantenmechanischen Theorie des Messprozesses können für sequentiell durchgeführte wiederholbare Messungen die gleichen Wahrscheinlichkeitsaussagen für Folgemessungen auch ohne Reduktionspostulat unmittelbar aus der unitären Dynamik abgeleitet werden (s. Abschn. 5). Dies wirft die Frage auf, ob überhaupt ein Reduktionspostulat benötigt wird.

Zustandsübergänge durch Reduktion sind allerdings im Gegensatz zur unitären Dynamik i.A. irreversibel, was der Faktizität tatsächlich registrierter Messergebnisse im Labor entspricht. Die Ergebnisse unitärer Dynamik können dagegen stets wieder rückgängig gemacht werden, sodass darauf basierende Ergebnisse im Prinzip nie endgültig sind.

Und selbst wenn man in der Systematik möglicherweise ohne ein Reduktionspostulat auskommt, ist es doch in der für die jeweilige Messmethode geeigneten Form empirisch vertretbar und ermöglicht eine vereinfachte Beschreibung des gemessenen Systems nach der Messung. Daher kann der Inhalt des Postulats zumindest als nützliche “Daumenregel” für die Anwendung in Versuchsanordnungen bzw. technischen Vorrichtungen betrachtet werden.

2 Der Messprozess in der QM nach v. Neumann

J. v. Neumann gab [1932] eine abstrakte quantenmechanische Beschreibung des Messprozesses als Wechselwirkung zwischen dem zu messenden System S und einem quantenmechanischen System

M, das als Messinstrument fungiert. Aus einigen erwünschten Eigenschaften einer idealen Messung leitete er gewisse mathematische Forderungen ab, die eine abstrakte Beschreibung des Messprozesses ermöglichen. Am Ende berechnet er ein konkretes Beispiel für die Ortsmessung, das zeigt, dass die aufgestellten Forderungen - zumindest näherungsweise - auch erfüllbar sind.

Da Messungen oder Beobachtungen in der Interpretation der QM i.A. vorausgesetzt werden, besteht bei der Interpretation der quantenmechanischen Behandlung des Messvorgangs eine gewisse Gefahr, in Zirkel zu geraten. Man kann diese Gefahr entschärfen, wenn man von vorneherein eine begriffliche Unterscheidung einführt und und zwischen *direkten* und *indirekten Messungen* unterscheidet. v. Neumanns Messprozess beschreibt in erster Linie indirekte Messungen. Die Bornsche Regel und (je nach Interpretation das Reduktionspostulat) sind Forderungen an direkte Messungen, deren Beschreibung möglicherweise völlig außerhalb der QM liegt. Bei indirekten Messungen wird ein Quantensystem als *Instrument* (Sonde, Apparat) verwendet, um ein anderes Quantensystem zu untersuchen. An diesem Instrument wird schließlich eine direkte Messung vorgenommen, deren Resultat es ermöglicht, Rückschlüsse auf das andere Quantensystem zu ziehen[11]. Diese direkte Messung wird von manchen Autoren auch als *Ablesung* des Messinstruments bezeichnet[12].

Will man im Zuge einer universellen quantenmechanischen Beschreibung der Welt die direkte Messung ebenfalls quantenmechanisch behandeln, so muss man im logischen Aufbau auf die Bornsche Regel (sowie das Projektionspostulat) verzichten und erklären, wie sie sich als Folge dieser quantenmechanischen Weltbeschreibung ergibt. Viele Publikationen kreisen daher auch um das Thema der Deduzierbarkeit der Bornschen Regel, wobei bisher keine Argumentation als zirkelfrei akzeptiert ist . Postuliert man dagegen die Bornsche Regel, so ist fraglich, ob die zugehörige Messung dann Gegenstand der QM sein kann. Für N. Bohr mussten daher Messgeräte wie auch der ganze experimentelle Rahmen klassisch, d.h. nicht quantenmechanisch, beschrieben werden. Ein anderer Standpunkt, der v. Neumann und E. Wigner zugeordnet wird, siedelt dagegen die direkte Messung im Beobachtungsakt des Bewusstseins an.

2.1 System, Zustand vor der Messung und gemessene Observable

Wir folgen v. Neumanns Darstellung einer indirekten Messung. Dabei übernehmen wir die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt und gehen davon aus, dass das betrachtete System S im Hilbertraum $\mathscr{H}$ beschrieben wird und die gemessene Observable $A \in \widehat{\mathscr{O}}$ beschränkt ist und ein diskretes Eigenwertspektrum $\sigma(A)$ hat, d.h.

$$A = \sum_{a \in \sigma(A)} a P_a$$

mit Projektionsoperatoren $P_a \in \mathscr{P}(\mathscr{H})$.$\{\alpha_k \in \mathscr{H}\}$ sei eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$ aus Eigenvektoren von A, d.h. $A\alpha_k = a_k \alpha_k$. Wenn wir, wie v. Neumann [1932] zusätzlich vereinfachend davon ausgehen, dass die Observable A nicht entartet ist, d.h. $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle = 0 \Rightarrow a_j \neq a_k$, dann ist im Zustand vor der Messung

$$\psi = \sum_k c_k \alpha_k$$

die Wahrscheinlichkeit $p_{A,\psi}(\{a_j\})$ des Ereignisses $\{a_j\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$p_{A,\psi}(\{a_j\} = \langle \psi, P_{a_j} \psi \rangle = \left| \langle \psi, \alpha_j \rangle \right|^2 = \left| c_j \right|^2$$

2.2 Messinstrument

Das Messinstrument M zur Messung der Observablen A wird selbst als ein quantenmechanisches System mit dem Hilbertraum $\mathscr{H}_M$ beschrieben.

[11]Diese Unterscheidung wird z.B. in Braginsky and Khalili [1992], Breuer and Petruccione [2002] eingenommen und ermöglicht eine unproblematische Betrachtung der Messvorgänge.

[12]Mittelstaedt [1998]

Eine gewisse Menge von reinen Zuständen $Z \subset \mathscr{H}_M$ wird als Menge von *Zeigerzuständen* des Messinstruments interpretiert: sie 'zeigen' die Messergebnisse an, d.h. wenn das Messinstrument nach der Messung im Zustand $\varphi \in Z$ ist, wurde ein bestimmter Wert a der Observablen A gemessen. Als zugehörige *Zeigerobservable* betrachten wir den Projektionsoperator $P_{[\varphi]}$, der das Ereignis repräsentiert, dass das Messinstrument im zugehörigen Zeigerzustand φ ist.

Für ein ideales Messinstrument müssen diese Zeigerzustände Z gewisse Bedingungen erfüllen:

Eindeutigkeit und Unterscheidbarkeit

1. Eindeutigkeit der Zeigerzustände: Die Menge der möglichen Messwerte $\sigma(A)$ wird injektiv in die Menge der Zeigerzustände abgebildet, d.h. es gibt eine Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \sigma(A) \to Z, a_k \to \tilde{\varphi}(a_k) = \varphi_k \tag{2.1}$$

bei der zu verschiedene Werten der Observablen auch verschiedene Zeigerzustände gehören

$$a_j \neq a_k \Rightarrow \varphi_j \neq \varphi_k \tag{2.2}$$

denn nur dann kann man anhand des Zeigerzustandes eindeutig den zugehörigen Messwert ermitteln.

2. Sichere Unterscheidbarkeit verschiedener Zeigerzustände: Die Zeigerzustände für verschiedene Messwerte müssen orthogonal sein, d.h.

$$a_j \neq a_k \Rightarrow \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0 \tag{2.3}$$

damit sie bei der Ablesung *mit Sicherheit* unterschieden werden können. Denn nur dann gilt im Zeigerzustand φ_j für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P_{[\varphi_k]}$ (mit $\varphi_j \neq \varphi_k$)

$$p_{P_{[\varphi_k]},\varphi_j}(1) = \langle \varphi_j, P_{[\varphi_k]}\varphi_j \rangle = \left|\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle\right|^2 = 0$$

2.3 Wechselwirkung

Das aus dem zu messenden System und dem Messinstrument zusammengesetzte Gesamtsystem wird im Produkthilbertraum $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ beschrieben.

Das Messinstrument befindet sich vor der Messung in einem Ausgangszustand φ_0, wechselwirkt für eine begrenzte Zeitspanne mit dem System. Anschließend sind die Zustände von System und Messinstrument so miteinander korreliert, dass man am Zustand des Messinstrumentes den Messwert der zu messenden Observablen $A \in \mathscr{O}(\mathscr{H})$ ablesen kann.

Die Wechselwirkung wird als unitäre Transformation U im Produktraum $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ beschrieben. Die konkrete Form und Dauer dieser Wechselwirkung werden wir hier nicht angeben, genau sowenig, wie wir die Dynamik der isolierten Systeme betrachten. Die Transformation U muss aber eine Reihe von Bedingungen erfüllen, wenn der Wechselwirkungsvorgang für eine ideale Messung der Observablen A geeignet sein soll.

Kalibrierung und Wiederholbarkeit

1. Kalibrierung (exakte Messung, ideale Messung): Für jeden Eigenzustand α_k der Observablen A muss das Messinstrument nach der Messung den zugehörigen Zeigerzustand φ_k anzeigen. D.h. aus dem Anfangszustand $\alpha_k \otimes \varphi_0 \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ des zusammengesetzten Systems, muss sich für alle $a_k \in \sigma(A)$ ein Endzustand der Form
$$U(\alpha_k \otimes \varphi_0) = \chi_k \otimes \varphi_k \tag{2.4}$$
ergeben, wobei $\chi_k \in \mathscr{H}$ ein nicht näher spezifizierter Zustand des Systems $\mathfrak{S}$ ist.

2. Wiederholbarkeit (Messung 1. Art): Ein Eigenzustand α_k der Observablen A soll durch den Messvorgang nicht verändert werden. D.h. aus dem Anfangszustand $\alpha_k \otimes \varphi_0 \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ des zusammengesetzten Systems, muss sich, wenn man gleichzeitig die Kalibrierung verlangt, für alle $a_k \in \sigma(A)$ der Endzustand
$$U(\alpha_k \otimes \varphi_0) = \alpha_k \otimes \varphi_k \tag{2.5}$$
ergeben.

2.4 Anfangszustand

Mittels dieser geforderten Eigenschaften der Wechselwirkung ist es jetzt möglich, den Messvorgang zu beschreiben. Das Messinstrument befindet sich vor der Messung in einem Zustand $\varphi_0 \in \mathscr{H}_M$, das zu messende System in einem Zustand $\psi \in \mathscr{H}$, dessen Entwicklung nach den Eigenvektoren der zu messenden Observablen A durch
$$\psi = \sum_k c_k \alpha_k$$
gegeben ist. Das Gesamtsystem $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ befindet sich dann im Anfangszustand
$$\psi \otimes \varphi_0 = \left(\sum_k c_k \alpha_k\right) \otimes \varphi_0 = \sum_k c_k (\alpha_k \otimes \varphi_0)$$

2.5 Verschränkter Endzustand

Bei einer wiederholbaren Messung ergibt sich dann nach den obigen Überlegungen wegen der Linearität von U aus diesem Anfangszustand der Endzustand
$$U(\psi \otimes \varphi_0) = \sum_k c_k U(\alpha_k \otimes \varphi_0) = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_\mathrm{k}$$
Wir bezeichnen diesen Endzustand mit
$$\Phi = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k \tag{2.6}$$

Dieser Zustand ist eine Superposition aus den verschiedenen möglichen Ergebnissen der Messung. Es handelt sich um einen verschränkten Zustand, in dem Zeigerzustände vom Messinstrument mit den Eigenzuständen der Observablen A korreliert sind.

Die Wahrscheinlichkeiten der Zeigerzustände des Messinstruments im Zustand Φ werden am Gesamtsystem SM durch die Erwartungswerte der Projektionsoperatoren $1 \otimes P_{[\varphi_j]}$ bestimmt, es gilt für alle $j \in I_{\sigma(A)}$
$$p_\Phi(P_{[\varphi_j]}) = \langle \Phi, (1 \otimes P_{[\varphi_j]})\Phi \rangle = |c_j|^2$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zeigerzustands φ_j ist also die gleiche, wie die Wahrscheinlichkeit des Wertes a_j der Observablen A im Zustand ψ, für alle $j \in I_{\sigma(A)}$

$$p_\Phi(P_{[\varphi_j]}) = p_{A,\psi}(\{a_j\})$$

Der reduzierte Zustand des Messinstruments ist daher eine Mischung der Zeigerzustände

$$W_M = \sum_k |c_k|^2 P_{[\varphi_k]}$$

Der reduzierte Zustand des Systems ist genau W' aus (1.1), denn es gilt:

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}_M}(P_{[\Phi]}) = \sum_k |c_k|^2 P_{[\alpha_k]} = W' \tag{2.7}$$

Für manche Interpretationen der QM endet die Beschreibung des Messvorgangs mit Erreichen des Zustands Φ. Der in Abschnitt 1.5 diskutierte Zustandsübergang $\psi \to W'$ durch die Messung, wie er z.B. am Doppelspalt beobachtet wird, kann mit (2.7) erklärt werden. Weitergehende Zusammenhänge zwischen dem System und dem Messgerät im Zustand Φ werden in Abschnitt 5 betrachtet.

2.6 Ablesung und Reduktion

Nach der Kopenhagener Interpretation der QM ist aber die indirekte Messung mit Erreichen des Zustands Φ noch nicht beendet[13]. Erst eine direkte Messung, nämlich die *Ablesung* des Messinstruments, liefert das definitive und endgültige Ergebnis. Für diese direkte Messung der Zeigerobservablen werden die Postulate aus Abschnitt 1 angewendet: Nach der *Bornschen Regel* wird mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_\Phi(P_{[\varphi_j]}) = p_{A,\psi}(\{a_j\}) = |c_j|^2$$

der Zeigerzustand φ_j abgelesen, der dem Messwert a_j zugeordnet ist. Nach dem *Reduktionspostulat* findet unter der Bedingung, dass der Zeigerzustand φ_j abgelesen wird, am Gesamtsystem der folgende Übergang statt:

$$\Phi \to \Phi_j = \frac{1}{\sqrt{|c_j|^2}} \left(1 \otimes P_{[\varphi_j]}\right) \Phi = \frac{1}{|c_j|} \sum_k c_k \alpha_k \otimes P_{[\varphi_j]} \varphi_k = \alpha_j \otimes \varphi_j$$

d.h. das Gesamtsystem befindet sich nach der Ablesung von φ_j in einem *Produktzustand* mit dem Messinstrument im Zeigerzustand φ_j und dem System im Eigenzustand α_j der Observablen A.

Der Zustand des Gesamtsystems nach der Ablesung ohne Bedingung, also ohne Annahme des Ergebnisses φ_j, ist

$$W_{SM} = \sum_j |c_j|^2 P_{[\alpha_j \otimes \varphi_j]} \tag{2.8}$$

mit dem durch die Ablesung *unveränderten* reduzierten Zustände des Systems

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}_M}(W_{SM}) = \sum_k |c_k|^2 P_{[\alpha_k]} = W'$$

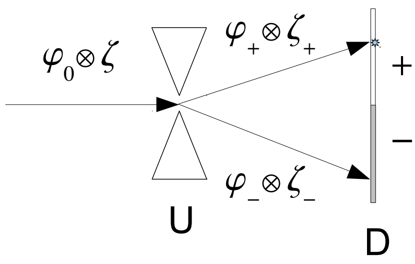
und des Messinstruments

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}}(W_{SM}) = \sum_k |c_k|^2 P_{[\varphi_k]} = W_M$$

[13] Daher bezeichnen manche Autoren Mittelstaedt [1998], Busch et al. [1991] den Wechselwirkungsvorgang auch nur als *Premeasurement*.

2.7 Stern-Gerlach-Experiment als Beispiel

Das Stern-Gerlach-Experiment wird oft als einfaches Beispiel für eine indirekte Messung angeführt: Der Ort, an dem das Silberatom detektiert wird, gibt Aufschluss über den Wert der entsprechenden Spinkomponente. Der Spin wird dabei als eigenständiges Quantensystem betrachtet, während der Massenmittelpunkt des Atoms als Teilchen das Messinstrument darstellt. Die Detektion des Teilchenorts entspricht der Ablesung der Zeigerkoordinate.



Das Teilchen hat am Anfang den Zustand φ_0- ein Wellenpaket, dass sich quasi-klassisch geradlinig gleichförmig bewegt - während das zu messende Spinsystem den unbekannten Zustand ζ hat. Bei der Passage des inhomogenen Magnetfelds findet eine kurze Wechselwirkung statt, die nach Kapitel "Grundprinzipien der Quantenmechanik", Abschnitt 4.8. durch den Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2m}P^2 + gS_zB_z$ bzw. die unitäre Transformation

$$U = \exp(-\frac{i}{\hbar}t_m H)$$

beschrieben wird, wobei t_m die Zeitdauer der Wechselweikung angibt. Für die Spinzustände ζ_+ bzw. ζ_-ergibt sich dabei eine Ablenkung in positiver oder negativer Richtung. Dies ist gerade die Eichbedingung.

Die Detektion des Teilchenorts findet am Schirm D statt. Dabei wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das abgelenkte Wellenpaket φ_+ im Bereich + bzw. das abgelenkte Wellenpaket φ_- im Bereich - detektiert wird, nahe bei 1 liegen. Befindet sich das Spinsystem am Anfang in einem Superpositionszustand

$$\zeta = c_-\zeta_- + c_+\zeta_+$$

so ist der Zustand vor der Detektion

$$\Phi = c_-\varphi_- \otimes \zeta_- + c_+\varphi_+ \otimes \zeta_+$$

Die Wahrscheinlichkeit p_+ bzw. p_-, das Teilchen im entsprechenden Bereich zu detektieren, ergibt sich dann aus den Betragsquadraten der Komponenten wie erwartet zu

$$p_+ = |c_+|^2, \ p_- = |c_-|^2$$

2.8 Bemerkungen

v. Neumanns Bedingungen

Die Orthogonalität der Zeigerzustände ist oftmals nur näherungsweise gegeben, wie die überlappenden Wellenpakte im Stern-Gerlach-Experiment zeigen. Die Kalibrierung garantiert die "Exaktheit" der Messergebnisse. Man sieht sofort, dass nur *kommutierende* Observablen auf diese Weise gemeinsam gemessen werden können, da zur Erfüllung dieser Bedingung gemeinsame Eigenvektoren nötig wären (vgl. Abschnitt 1.2).

Die Wiederholbarkeitsbedingung kann man auch als Abschwächung der Forderung betrachten, dass eine ideale Messung den Zustand des gemessenen Systems nicht verändert: Diese Forderung wird nur für Eigenzustände der Observablen A aufgestellt. v. Neumanns Beschreibung zeigt, dass dann gewisse Zustände des Systems zwangsläufig verändert werden, nämlich $\psi \to W'$

In Abschnitt 3 werden Messungen behandelt, die auf beide Bedingungen verzichten.

Die Forderung, dass die Observable A nicht entartet ist, vereinfacht lediglich die Berechnungen, ändert aber nichts an den grundsätzlichen Ergebnissen. Das gilt auch für die Beschreibung der Anfangszustände durch reine Zustände statt durch Mischungen. Die Vereinfachungen von v. Neumanns richtungsweisender Beschreibung von [1932] finden sich auch in einem großen Teil der Literatur zum Messproblem.

Indirekte Messungen als Ersatz für Direkte

Sowohl die Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses als auch der Zustand des Systems nach der Messung sind bei der indirekten Messung genauso, wie es Bornsche Regel und Reduktionspostulat für eine direkte Messung der Observablen A fordern, wenn man die indirekte Messung durch die Ablesung der Messergebnisse, d.h. eine direkte Messung der Zeigerobservablen, abschließt. Daher ist eine indirekte Messung ein perfekter Ersatz für eine direkte Messung.

Dies gilt auch für Interpretationen der QM, die auf das Projektionspostulat verzichten und allein die Bornsche Regel anwenden. Die Zeigerzustände haben stets die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung wie die Werte der gemessenen Observablen, sodass ihre Ablesung äquivalente Resultate liefert.

Indirekte Messungen können natürlich nicht alle direkten Messungen ersetzen, denn die Ablesung der Zeigerzustände durch eine direkte Messung lässt sich nicht eliminieren. Es ist allerdings möglich, mit der direkten Messung einer einzelnen Observablen an den Messgeräten (z.B. des Orts) auszukommen, wenn man durch passende unitäre Transformationen (Wechselwirkungen) alle Observablen des Systems im Messprozess entsprechend transformieren kann. Ein Beispiel liefert die Messung des Spins im Stern-Gerlach-Experument durch Ablesung des Teilchenorts. [14] So wird in der Quanteninformatik oftmals nur in einer Basis von Zeigerzuständen (computational base) gemessen, die den Werten 0 und 1 der Qubits entspricht. Alle anderen Messungen lassen sich dann mit Hilfe von unitären Transformation ("Maschinenprogrammen") und diesen Basismessungen durchführen (s. Mermin 2006).

v. Neumanns Kette und Heisenbergs Schnitt

Wie v. Neumann bereits zeigte, kann man das Schema der indirekten Messung iterieren, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert: Die Ablesung des Zeigers an M wird wieder als indirekte Messung durchgeführt, deren Zeiger wiederum indirekt abgelesen wird, ... Wenn man Messinstrumente $M_2, \ldots M_n$ betrachtet, die in einer *Kette* den Zeigerzustand des jeweils vorhergehenden Messinstruments messen, wobei sie in der oben beschriebenen Weise paarweise miteinander wechselwirken, so erhält man am Ende einen verschränkten Zustands des Gesamtsystems

$$\Phi^{(SMM_2 \ldots M_n)} = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k \otimes \varphi_k^{(M_2)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(M_n)}$$

der durch eine Ablesung, d.h. eine direkte Messung $P_{[\varphi_j]}^{(M_k)}$, an einem beliebigen Messinstrument M_k der Kette "kollabiert". Alle Messinstrumente haben danach jeweils den gleichen Zeigerzustand, der

[14] Die Bohmsche Interpretation der QM macht davon Gebrauch, indem sie ausschließlich die Ortskoordinate des Zeigers als real und damit direkt ablesbar betrachtet.

zum Messergebnis a_j gehört

$$\Phi_j^{(SMM_2...M_n)} = \alpha_j \otimes \varphi_j \otimes \varphi_j^{(M_2)} \otimes ... \otimes \varphi_j^{(M_n)}$$

Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis bleibt $\left|c_j\right|^2$.

Als Beispiel kann man die Nebelkammer betrachten: das geladene Teilchen ionisiert ein Wassermolekül, das wiederum mit anderen Molekülen wechselwirkt, sodass ein Wassertröpfchen gebildet wird, das mit den Photonen der Beleuchtung wechselwirkt, die ein Bild zum Beobachter tragen.

v. Neumann verfolgte diese Kette spekulativ über das Auge bis in das Nervensystem des Beobachters. Am Ende dieser Kette steht dann der Bewusstseinsakt der Wahrnehmung, den v. Neumann mit der Zustandsreduktion in Verbindung brachte. Er zitiert an dieser Stelle das Prinzip des psychophysischen Parallelismus. Eine pragmatische Beschreibung dieses Vorgangs wäre, dass der Beobachter in dem Moment, in dem er das Ergebnis der Messung erfährt, eine neue Zustandsbeschreibung des Systems für weitere Beobachtungen oder Manipulationen ansetzt. Die Änderung des Zustands durch Reduktion wäre dann epistemisch zu interpretieren.

Es ist gleichgültig, wo in v. Neumanns Kette die direkte Messung stattfindet. Der Schnitt zwischen Beobachter und seinen Instrumenten auf der einen Seite und dem beobachteten quantenmechanischen System auf der anderen Seite kann beliebig verschoben werden, ohne etwas an den Resultaten zu ändern. Auf der einen Seite kollabiert der Zustand des gemessenen Systems, auf der anderen Seite wird ein bestimmtes Ergebnis beobachtet.

Diese Vorstellung eines verschieblichen Schnitts geht auf Heisenberg (Heisenberg-cut) zurück (vgl. Heisenberg [1930]). Allerdings betrachtete Heisenberg einen *Schnitt* zwischen quantenmechanischer Beschreibung des Systems und klassischer Beschreibung der Messinstrumente. Die klassische Beschreibung impliziert dabei “reale” oder “objektive” Zeigerzustände, die unabhängig vom Beobachter bestehen (wie beispielsweise Planetenpositionen). Die Forderung, dass Experimentierapparaturen und Messgeräte im Endeffekt klassisch sein müssen, ist ein wichtiger Bestandteil der Kopenhagener Interpretation und wurde insbesondere von Bohr immer wieder angeführt (vgl. Bohr, 1958).

Messproblem

Das Auftreten des verschränkten Zustandes Φ nach der Wechselwirkung zwischen Messinstrument und System wird oftmals als grundlegendes Problem der QM betracht, das *Messproblem*.

Für Interpretationen ohne Projektionspostulat endet die Beschreibung mit diesem Zustand. Wenn man aber tatsächlich eine Messung durchführt, liest man am Ende einen bestimmten Zeigerstand φ_j ab und keine Superposition. *Schrödingers Katze* wird an dieser Stelle oftmals angeführt und soll einen Teil der Messvorrichtung verkörpern, wobei ihr Leben als Zeigerzustand dient.

Manche Interpretationen gehen davon aus, dass mit Erreichen des Zustands Φ bereits ein bestimmtes Messergebnis vorliegt, auch wenn ungewiss ist, welches. Dafür sprechen experimentelle Resultate, die am System den Zustandsübergang $\psi \to W'$ belegen (vgl. Hobson 2012). Diese Annahme wirft allerdings auch Probleme auf, die wir noch behandeln werden, z.B. kann durch weitere Wechselwirkungen das Messergebnis wieder “gelöscht” werden (quantum eraser).

Wenn man die Wellenfunktion Φ lediglich als ein Mittel interpretiert, die Wahrscheinlichkeiten für alle weiteren Beobachtungen an dem zusammengesetzten System zu berechnen, ist dieser Zustand Φ unproblematisch. Mit seiner Hilfe kann berechnet werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit man eine lebendige oder tote Katze nach der Wechselwirkung beobachtet.

Die Voraussetzung von Beobachtungen bzw. direkten Messungen impliziert aber eine gewisse Dichotomie, die z.B. in der Kopenhagener Interpretation zur Forderung führt, dass Experimentierapparaturen und Messgeräte *klassisch* (d.h. superpositionsfrei) sein müssen. Für eine epistemische Interpretation der Wahrscheinlichkeiten kann auch der Bewusstseinsakt der Beobachtung diese Funktion übernehmen.

Wenn man dagegen die Bornsche Regel und entsprechende direkte Messungen nicht voraussetzt, bleibt unklar, wie Superpositionen im Allgemeinen und der Zustand Φ im Besonderen zu interpretieren ist.

3 Widersprüche zum Projektionspostulat bei nicht-wiederholbaren Messungen

Ein kleine Abwandlung von v. Neumanns Beschreibung ermöglicht exakte, indirekte Messungen, die nicht dem v. Neumann/Lüders-Projektionspostulat folgen. Dazu ist nur eine Wechselwirkung nötig, die durch eine unitäre Transformation $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M)$ beschrieben wird, die die Wiederholbarkeitsbedingung nicht erfüllt, aber die Kalibrierungsbedingung (bei Pauli [1933] "ideale Messung zweiter Art") . D.h. aus dem Anfangszustand $\alpha_k \otimes \varphi_0 \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ des zusammengesetzten Systems, muss sich für jedes $a_k \in \sigma(A)$ ein Endzustand der Form

$$U(\alpha_k \otimes \varphi_0) = \chi_k \otimes \varphi_k$$

ergeben, wobei die $\{\chi_k \in \mathscr{H}\}$ nicht näher spezifizierte Zustände des Systems $\mathfrak{S}$ darstellen. Für den Zustand nach der Wechselwirkung ergibt sich dann

$$\Phi = U(\psi \otimes \varphi_0) = \sum_k c_k \chi_k \otimes \varphi_k$$

Nach der Bornschen Regel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, den Zeigerzustand φ_j abzulesen

$$p_\Phi(P_{[\varphi_j]}) = \left\langle \Phi, 1 \otimes P_{[\varphi_j]} \Phi \right\rangle = \left| c_j \right|^2$$

Kollabiert das Gesamtsystem bei der Ablesung des Zeigers entsprechend de m Reduktionspostulat,

$$\Phi \to \Phi_j = \frac{1}{\left| c_j \right|} \left(1 \otimes P_{[\varphi_j]} \right) \Phi = \frac{1}{\left| c_j \right|} \sum_k c_k \chi_k \otimes P_{[\varphi_j]} \varphi_k = \chi_j \otimes \varphi_j$$

befindet sich das gemessene System im Zustand χ_j, wenn der Zeiger den Messwert a_j anzeigt. Diese Situation steht im klaren Widerspruch zum Reduktionspostulat von v. Neumann/Lüders, wenn $[\chi_j] \neq [\alpha_j]$; seine Anwendung kann in dieser Situation zu falschen Vorhersagen für weitere Messungen führen (vgl. Ballentine, 1990;Laura and Vanni [2008]).

Die Zustände $\{\chi_k \in \mathscr{H}\}$ müssen nicht paarweise orthogonal sein, sie können sogar alle gleich sein $\chi_k = \chi_0$. Letzteres wäre z.B. bei idealen Photonendetektoren der Fall, die bei der Detektion alle Photonen absorbieren und das elektromagnetische Feld im Vakuumzustand hinterlassen. Das hat zur Folge, dass sich die Superposition der Systemzustände auf die Zeigerzustände überträgt, aber System und Messinstrument in einem Produktzustand separiert[15] werden

$$\Phi = U(\psi \otimes \varphi_0) = (\sum_k c_k \alpha_k) \otimes \varphi_0 = \chi_0 \otimes (\sum_k c_k \varphi_k) = \chi_0 \otimes \tilde{\psi}$$

Im Rahmen der Minimalinterpretation sind nicht-wiederholbare indirekte Messungen jedenfalls genauso gut wie wiederholbare Messungen dazu geeignet, mittels statistischer Versuchsreihen den Erwartungswert von Observablen zu ermitteln. Bei sequentiellen Messungen an einem Quantensystem müssen aber entsprechend veränderte Reduktionsregeln beachtet werden. Die Anwendung der v. Neumann-Lüders-Regel führt zu in diesem Fall einer falschen Beschreibung (vgl. Ballentine [1998], Laura and Vanni [2008]).

Die Zeigerablesung an makroskopischen Messinstrumenten ist allerdings in der Regel wiederholbar. Die Speicherung und wiederholbare Abrufbarkeit des Ergebnisses ist eine *notwendige Bedingung* für die Verarbeitung der Messdaten. Insofern erscheint es sinnvoll, für die direkten Messungen, die als Zeigerablesung am Ende einer v. Neumannschen Kette stehen, die Wiederholbarkeit zu fordern, selbst dann, wenn die eigentliche Messung am System eine nicht wiederholbare ist.

[15] Dieser Vorgang entspricht der SWAP Operation zwischen Qubits, vgl. Nielsen and Chuang [2000]

3.1 Indirekte Messung von POVMs, verallgemeinerte Reduktionsregeln

Man kann auch auf die Kalibrierungsbedingung verzichten und eine beliebige Wechselwirkung zwischen System und Messinstrument zulassen. Die Zeigerzustände, die man nach der Wechselwirkung am Messinstrument ablesen kann, ermöglichen dann immer noch Rückschlüsse auf das System. Die Ablesung der Zeigerzustände konstituiert eine verallgemeinerte Messung, die Messung einer unscharfen Observablen, wie es z.B. auch bei der Wechselwirkung eines geladen Teilchens mit den Wasserdampfmolekülen einer Nebelkammer der Fall ist.

Der Zustand nach der Wechselwirkung ist

$$\Phi = U(\psi \otimes \varphi_0)$$

Die Wahrscheinlichkeit, den Zeigerzustand φ_j abzulesen, ist nach der Bornschen Regel

$$p_j = \langle \Phi, 1 \otimes P_{[\varphi_j]} \Phi \rangle = \langle U(\psi \otimes \varphi_0), (1 \otimes P_{[\varphi_j]}) U(\psi \otimes \varphi_0) \rangle$$

Der Zustand des Gesamtsystems nach der Ablesung des Zeigerzustandes φ_j ist dann gemäß dem Reduktionspostulat

$$\Phi_j = \frac{1}{\sqrt{p_j}}(1 \otimes P_{[\varphi_j]})\Phi = \frac{1}{\sqrt{p_j}}(1 \otimes P_{[\varphi_j]})U(\psi \otimes \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{p_j}}\tilde{\psi}_j \otimes \varphi_j$$

Dadurch wird für beliebige Anfangszustände des Systems $\psi \in \mathscr{H}$ implizit ein linearer Operator $M_j \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ definiert mit

$$\tilde{\psi}_j = M_j \psi$$

und

$$p_j = \langle M_j \psi, M_j \psi \rangle = \langle \psi, M_j^\dagger M_j \psi \rangle$$

Für das Produkt $M_j^\dagger M_j$ gilt daher

$$0 < M_j^\dagger M_j \leq 1$$

sodass es einen Effektoperator darstellt

$$M_j^\dagger M_j \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$$

und p_j als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden kann, dass der Effekt $E_j = M_j^\dagger M_j$ - also die Ablesung des Zeigerzustands φ_j- eintritt. Es gilt weiterhin

$$\sum_k M_k^\dagger M_k = 1$$

d.h. $\{M_k^\dagger M_k \in \mathscr{E}(\mathscr{H})\}_k$ definieren ein POVM. Die Effektoperatoren müssen dabei nicht paarweise kommutieren.

Verallgemeinerte Reduktionsregel

Für den Zustand des Systems nach der Ablesung des Zeigerzustands φ_j erhält man dann insgesamt

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{\langle \psi, M_j^\dagger M_j \psi \rangle}} M_j \psi$$

Für Mischungen ergibt sich damit nach der Ablesung des Zeigerzustandes φ_j

$$W_j = \frac{1}{\mathrm{tr}(M_j^\dagger M_j W)} M_j^\dagger W M_j$$

Diese Reduktionsregeln für Messoperatoren umfassen alle anderen Reduktionsregeln: Für wiederholbare indirekte Messungen der Observablen A sind die Messoperatoren $M_k = P_{[\alpha_k]} = |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|$, für exakte, nicht-wiederholbare indirekte Messungen der Observablen A sind die Messoperatoren $\tilde{M}_k = |\chi_k\rangle\langle\alpha_k|$, in beiden Fällen wird das gleiche POVM, nämlich das von der orthogonalen Zerlegung der Einheit $\{P_{[\alpha_k]}\}_k$ definierte PVM gemessen, es gilt $\tilde{M}_k^\dagger \tilde{M}_k = |\alpha_k\rangle\langle\chi_k|\chi_k\rangle\langle\alpha_k| = |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| = M_k = M_k^\dagger M_k$

Die Messung eines POVMs ist in gewisser Weise die allgemeinste Form der indirekten Messung: Immer wenn ein Messinstrument auf irgendeine Weise mit dem System wechselwirkt, impliziert die Beobachtung (d.h. die direkte Messung) von Zeigerzuständen die Messung eines POVMs. Für jedes POVM $\{E_k \in \mathscr{E}(\mathscr{H})\}_k$ existieren entsprechende *Messoperatoren* $M_k \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, sodass $E_k = M_k^\dagger M_k$, da $E_k \geq 0$. Wie die Beispiele zeigen, sind die Messoperatoren aber durch das POVM nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen vom konkreten Messverfahren ab.

Auch diese allgemeine Reduktionsregel muss im Sinne von Abschnitt 4 nicht postuliert werden: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten bzgl. einer Zeigerablesung am verschränkten Gesamtsystem ergeben für weitere Messungen die gleichen Resultate auch ohne entsprechendes Postulat.

4 Unmöglichkeit des Kollaps durch eine unitäre Dynamik

Die kontinuierliche, deterministische und reversible unitäre Dynamik in der quantenmechanischen Behandlung des Messprozesses kann den diskontinuierlichen, indeterministischen und irreversiblen Kollaps nach der v.Neumann-Lüders-Regel nicht erklären. Dieses Resultat wurde, obwohl schon lange bekannt, immer wieder in Frage gestellt, indem man verschiedene Annahmen bei der Behandlung des Messprozesses problematisierte: Idealität und Wiederholbarkeit der Messung, den reinen Zustand des Messinstruments, die Abgeschlossenheit des Messinstruments, die Eindeutigkeit und Orthogonalität der Zeigerzustände, ...

Bassi und Ghirardi [2000] zeigen, dass es auch unter sehr allgemeinen Voraussetzungen nicht möglich ist, einen Kollaps bei der Messung durch lineare (unitäre) Transformationen zu erklären. Die wichtigsten Punkte sind:

1. Das Messinstrument wird nicht isoliert betrachtet, die Umgebung wird miteinbezogen. Die Autoren sprechen sogar vom Universum. Es wird darin ein Messinstrument $\mathscr{H}_M$ angenommen, dass zu messende System $\mathscr{H}$, sowie der Rest des Universums $\mathscr{H}_R$. Der Hilbertraum des Gesamtsystems - also des Universums - ist $\mathscr{H}_G = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M \otimes \mathscr{H}_R$.

2. Messinstrument und Umgebung müssen am Anfang einer Messung nicht immer im gleichen Zustand sein. Es kann ein beliebiger Anfangszustand $\varphi \in V_0 \subseteq \mathscr{H}_M \otimes \mathscr{H}_R$ vorliegen, von dem lediglich verlangt wird, dass ein makroskopischer 'Zeiger' sich in einer Grundstellung befindet.[16]

3. Für die Wechselwirkung zwischen System, Messinstrument und Umgebung lassen sie einen zeitabhängigen Hamiltonoperator zu, indem sie eine unitäre Transformation $U_{t,t'} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_G)$ annehmen, die nicht nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ abhängt.

4. Bei der Messung einer Observablen $A \in \mathscr{H}$, die nur zwei Werte annehmen kann $\sigma(A) = \{+1, -1\}$, wird nicht gefordert, dass beim Vorliegen eines Eigenzustandes $\alpha_+, \alpha_- \in \mathscr{H}$ am System für alle Anfangszustände des Messinstruments und des Rests des Universums sich ein bestimmter Zeigerzustand einstellt. Es wird nur verlangt, dass der Endzustand des Gesamtsystems in gewissen disjunkten Mengen $V_+, V_- \subseteq \mathscr{H}_G$ von Zuständen liegt, die die unterschiedlichen Zeigerzustände repräsentieren, d.h. für alle $\varphi \in V_0$ gilt

$$U_{t_E,t_A}(\alpha_+ \otimes \varphi) = \phi_+ \tag{4.1}$$

$$U_{t_E,t_A}(\alpha_- \otimes \varphi) = \phi_- \tag{4.2}$$

   mit $\phi_+ \in V_+, \phi_- \in V_-$.

5. Vektoren aus verschiedenen Endzustandsmengen, d.h. unterscheidbare Zeigerzustände, wären bei einer idealen Messung orthogonal. Die Autoren stellen die schwächere Forderung[17] auf, dass für alle $\phi_+ \in V_+, \phi_- \in V_-$ gilt

$$\left\| \phi_+ - \phi_- \right\| \geq \sqrt{2} - \eta \tag{4.3}$$

   mit einem festen positiven $\eta \ll 1$. Genauer: $\eta < \sqrt{2} - 1$, denn dann gilt $\left\| \phi_+ - \phi_- \right\| > 1$.

---

[16] Man könnte diese Forderung vielleicht exakter formulieren, wenn man annimmt, dass alle $\varphi \in V_0$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 einer entsprechenden Indikatorobservablen $I_0 \in \mathscr{P}(\mathscr{H}_M \otimes \mathscr{H}_R)$. B&G vermeiden dies aber zugunsten größerer Allgemeinheit.

[17] Für normierte ϕ_+, ϕ_- gilt $\left\| \phi_+ - \phi_- \right\| = \sqrt{\langle \phi_+ - \phi_-, \phi_+ - \phi_- \rangle} = \sqrt{2 - 2Re(\langle \phi_+, \phi_- \rangle)} \leq \sqrt{2}$. Bei Orthogonalität gilt $\langle \phi_+, \phi_- \rangle = 0$ und $\left\| \phi_+ - \phi_- \right\| = \sqrt{2}$.

6. Es wird nicht verlangt, dass die Endzustände faktorisieren (wie z.B. $\phi_+ = \alpha_+ \otimes \varphi_+$).

7. Es muss sich nicht um eine wiederholbare Messung handeln.

Unter diesen Voraussetzungen gilt: *Die Messung einer Superposition*

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+ + \alpha_-) \tag{4.4}$$

führt für jeden Anfangszustand des Messinstruments und des Rest des Universums $\varphi \in V_0$ zu einem Endzustand $\phi \in \mathscr{H}_G$, der in keiner der beiden Mengen V_+, V_- liegt.

Beweis: Nach den Voraussetzungen gilt für jedes $\varphi \in V_0$ wegen der Linearität von U_{t_E,t_A}

$$\phi = U_{t_E,t_A}(\psi \otimes \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ + \phi_-) \tag{4.5}$$

mit $\phi_+ \in V_+, \phi_- \in V_-$. Dabei gilt für den Abstand

$$\left\|\phi - \phi_-\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ + \phi_-) - \phi_-\right\| = \tag{4.6}$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_+ + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)\phi_-\right\| \leq \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_+\right\| + \left\|(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)\phi_-\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \tag{4.7}$$

Dies bedeutet aber nach Punkt 5 der Voraussetzungen, dass $\phi \notin V_+$. Analog gilt $\left\|\phi - \phi_+\right\| \leq 1$ und somit $\phi \notin V_-$.

Das Resultat überträgt sich auch auf alle Mischungen von Anfangszuständen aus V_0. Die resultierende Mischung der Endzustände besteht nur aus reinen Zuständen, die weder in V_+ noch V_-in liegen.

5 Unnötigkeit des Kollaps und bedingte Wahrscheinlichkeiten

v. Neumanns Argumentation für sein Projektionspostulat bei der Diskussion des Compton-Simon-Experiments hat eine Lücke: Die sichere Wiederholung des Messergebnisses in einer zweiten Messung erzwingt den passenden Eigenzustand $\alpha \in \mathscr{H}$ des gemessenen Systems nur unter der Voraussetzung, dass man dieses System alleine betrachtet. Aber gerade nach der Wechselwirkung mit einem Messinstrument ist diese Voraussetzung fragwürdig. *Befindet sich das System zusammen mit dem Messinstrument in dem verschränkten Zustand Φ, so wird dadurch ebenfalls die sichere Wiederholung des Messergebnisses garantiert, ohne dass dazu der Kollaps auf einen Eigenzustand erforderlich ist.*

Der Zustand des Gesamtsystems nach der Wechselwirkung des Systems S mit dem Messinstrument M ist

$$\Phi = U\psi \otimes \varphi_k = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k$$

Wenn man jetzt ein zweites Messinstrument M_2 vom gleichen Typ mit dem System wechselwirken lässt und diese Wechselwirkung mit $U^{(SM_2)}$ bezeichnet, erhält man den Zustand

$$\Phi^{(SMM_2)} = U^{(SM_2)}\Phi \otimes \varphi_0^{(M_2)} = U^{(SM_2)}\sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k \otimes \varphi_0^{(M_2)} = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k \otimes \varphi_k^{(M_2)}$$

Da beide Messinstrumente verschiedene Systeme sind, kommutieren alle Observablen $A \in \mathscr{O}(\mathscr{H}_M), B \in \mathscr{O}(\mathscr{H}_{M_2})$ und die Ablesung der Zeigerzustände kann in einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben werden. Nach der Bornschen Regel ist die Wahrscheinlichkeit, die Zeigerzustände $\varphi_j, \varphi_k^{(M_2)}$ an den entsprechenden Instrumenten abzulesen, gegeben durch

$$p_{\Phi^{(SMM_2)}}(P_{[\varphi_j]}, P_{[\varphi_k^{(M_2)}]}) = \left\langle \Phi^{(SMM_2)}, 1^{(S)} \otimes P_{[\varphi_j]} \otimes P_{[\varphi_k^{(M_2)}]} \Phi^{(SMM_2)} \right\rangle = |c_k|^2 \, \delta_{j,k}$$

und die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Zeigerzustand $\varphi_k^{(M_2)}$ am zweiten Instrument, wenn am ersten der Zeigerzustand φ_j abgelesen wurde

$$p_{\Phi^{(SMM_2)}}(P_{[\varphi_k^{(M_2)}]} | P_{[\varphi_j]}) = \delta_{j,k}$$

Die Wahrscheinlichkeit, zweimal das gleiche Ergebnis abzulesen, ist daher offensichtlich 1.

Mit der gleichen Methodik kann man auch die Messung anderer Observablen $B \in \mathscr{O}$ mit einem zweiten Instrument $\tilde{M}_2$ betrachten. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, den Messwert b_k abzulesen, unter der Bedingung, dass am ersten Instrument der Wert a_j abgelesen wird, ist dann

$$p_{\Phi^{(SM\tilde{M}_2)}}(P_{[\varphi_k^{(\tilde{M}_2)}]} | P_{[\varphi_j]}) = \left| \langle \alpha_j, \beta_k \rangle \right|^2$$

Es ergeben sich also an dem verschränkten Zustand Φ die gleichen bedingten Wahrscheinlichkeiten für weitere Messergebnisse am System wie in Folge des Projektionspostulats durch den Zustandsübergang $\psi \to \alpha_j$, der ja ebenfalls unter der Bedingung steht, dass der Wert a_j gemessen wurde. Dies gilt auch, wenn sich das System S nach der Messung unitär entwickelt.

Damit wird klar, wie in der Minimalinterpretation auf das Reduktionspostulat verzichtet werden kann: Alle Messungen an einem System innerhalb eines physikalischen Experiments werden als indirekte quantenmechanische Messungen behandelt und die Zeigerzustände der Messinstrumente am Ende des Experiments abgelesen. Als Beispiel können Fotografien der Tröpfchenspuren in einer Nebelkammer dienen, die Bahnen markieren, auf denen die Teilchen zum Zeitpunkt der Fotografie längst nicht mehr zu finden sind.

Da die Ergebnisse die gleichen sind, wie sie sich aus dem Projektionspostulat ergeben, wird dieses nicht benötigt, um das Experiment zu beschreiben. Allerdings müssen die Messinstrumente dabei eine wichtige Bedingung erfüllen: Die Zeigerzustände müssen bis zum Ende des Experiments stabil bleiben.

Der Kollaps kann zwar auch auf diese Weise nicht durch eine unitäre Dynamik erklärt werden, aber die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Teilsysteme schon. Dies kann man wiederum als Argument für den epistemischen Charakter der quantenmechanischen Zustandsbeschreibung sehen: Die Reduktion erfolgt aufgrund der Beobachtung des Messergebnisses nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung für bedingte Wahrscheinlichkeiten.

6 Irreversibilität, Dekohärenz und klassische Messinstrumente

Mit dem verschränkten Zustand ϕ kann man viele Eigenschaften der Messung verstehen. Aber erst die Reduktion, d.h. Zustandsübergang des Gesamtsystems $\Phi \to \Phi_j$ bei der Ablesung des Messinstruments, sorgt für endgültige Ergebnisse und macht den Messvorgang irreversibel.

Aus dem Zustand Φ kann man den Zustand vor der Messung wiederherstellen, wenn man die unitäre Transformation $U^{-1} = U^\dagger$ anwendet

$$U^{-1}\Phi = U^{-1}U(\psi \otimes \varphi_0) = \psi \otimes \varphi_0$$

Dies ist nach der Reduktion nicht mehr möglich, wie in Abschnitt 1.5 ausgeführt. Die Anwendung von U^{-1} auf die Zustände nach dem Kollaps, Φ_j und W_{SM}, führt auch nicht zum Anfangszustand sondern zu

$$U^{-1}\Phi_j = \alpha_j \otimes \varphi_0$$

$$U^{-1}W_{SM}U = \sum_j |c_j|^2 P_{[U^{-1}(\alpha_j \otimes \varphi_j)]} = \sum_j |c_j|^2 P_{[\alpha_j \otimes \varphi_0]} = (\sum_j |c_j|^2 P_{[\alpha_j]}) \otimes P_{[\varphi_0]} = W' \otimes P_{[\varphi_0]}$$

d.h. das Messinstrument wird in den Anfangszustand zurückversetzt, während das System den Zustand *nach* der Messung behält.

Der Zustand nach dem Kollaps W_{SM} ist separabel, die Verschränkung der Superposition Φ ist verschwunden. Man kann W_{SM} als klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Zuständen $\{\Phi_j\}$ interpretieren. Als Zustand nach dem Kollaps erlaubt dieser Zustand W_{SM} eine epistemische Interpretation der Wahrscheinlichkeiten, d.h. in der Realität liegt einer der Zustände $\Phi_j = \alpha_j \otimes \varphi_j$ (mit der Wahrscheinlichkeit $|c_j|^2$) vor, man weiß bloß nicht welcher.

Man gelangt zu diesem Zustand W_{SM} aber auch ohne Kollaps, wenn man einfach ein weiteres Messinstrument M_2 hinzunimmt, das als Teil der v. Neumannschen Kette mit dem Messinstrument wechselwirkt oder wie in Abschn. 5 beschrieben die Messung wiederholt

$$\Phi^{(SMM_2)} = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k \otimes \varphi_k^{(M_2)}$$

Betrachtet man dann den Zustand des Teilsystems SM so erhält man

$$\mathrm{tr}_{\mathscr{H}_{M_2}}(P_{\Phi^{(SMM_2)}}) = \sum_k |c_k|^2 P_{[\alpha_k \otimes \varphi_k]} = W_{SM}$$

d.h. den Zustand nach dem Kollaps. Kann man auch in diesem Fall den Zustand W_{SM} epistemisch interpretieren?

Das zweite Messinstrument kann auf verschiedene Art "ins Spiel gebracht" werden, z.B. durch v. Neumanns Kette zum Beobachter, Lawineneffekte mit Mehrfachmessungen oder die Wechselwirkung mit der Umgebung. Entscheidend ist, das ein "Fußabdruck" der Messung außerhalb von System und primären Messinstrument erhalten bleibt.

In der Dekohärenztheorie wird dies mittels der Umgebung ausgeführt. Ein Messinstrument ist ja i.A. kein isoliertes System, sondern steht in Wechselwirkung mit seiner Umgebung. Daher ist es naheliegend, es als offenes System zu behandeln und die Dekohärenz der Zeigerzustände zu betrachten, d.h. Zustandsübergänge, die durch die unkontrollierte Wechselwirkung mit der Umgebung zustande kommen (vgl. Schlosshauer, 2004). Bei der Konstruktion einer Messvorrichtung ist natürlich darauf zu achten, dass die Ablesung der Messwerte dadurch nicht gestört werden. Für den Messprozess macht die Dekohärenztheorie folgende Annahmen:

1. Die Zeigerzustände des Messinstruments können als räumlich lokalisierte Wellenpakete eines Teilchens beschrieben werden.
2. Die Wechselwirkung des Messinstruments mit der Umgebung folgt wie im vorigen Kapitel in Abschnitt 4.5 besprochen einem Dekohärenzmechanismus, der aus beliebigen Zuständen eines Teilchens Mischungen solcher räumlich lokalisierter Wellenpakete produziert.
3. Bereits vorliegende Zeigerzustände bleiben dabei unverändert.

Die aufgeführten Bedingungen werden alle vom Wechselwirkungsschema einer wiederholbaren Messung erfüllt, wenn die Umgebung als ein Messinstrument modelliert wird, das die Zeigerobservable des eigentlichen Messinstruments misst: Die Umgebung wird mit dem Hilbertraum $\mathscr{H}_U$ beschrieben, das zusammengesetzte System aus Messinstrument und Umgebung mit dem Hilbertraum $\mathscr{H}_M \otimes \mathscr{H}_U$, die Wechselwirkung durch $U_{MU} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_M \otimes \mathscr{H}_U)$. Die Wechselwirkung mit der Umgebung lässt Zeigerzustände nach Annahme 3 invariant, es gilt für alle Zeigerzustände $\varphi_k \in Z$

$$U_{MU}(\varphi_k \otimes \varepsilon_0) = \varphi_k \otimes \varepsilon_k$$

wobei $\varepsilon_k \in \mathscr{H}_U$ paarweise orthogonale Zustände der Umgebung darstellen. Mit dem Zustand $\Phi \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ von System und Messinstrument (2.6) ergibt sich dann als Zustand des Gesamtsystems $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M \otimes \mathscr{H}_U$

$$\Phi^{(SMU)} = 1^{(S)} \otimes U_{MU}(\Phi \otimes \varepsilon_0) = \sum_k c_k \alpha_k \otimes U_{MU}(\varphi_k \otimes \varepsilon_0) = \sum_k c_k \alpha_k \otimes \varphi_k \otimes \varepsilon_k$$

Reduziert auf System und Messinstrument $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_M$ erhält man dann wieder die Mischung

$$W_{SM} = \mathrm{tr}_{\mathscr{H}_U}(P_{[\Phi_{SMU}]}) = \sum_k |c_k|^2 P_{[\alpha_k \otimes \varphi_k]}$$

die am Ende des Messvorgangs *nach* dem Kollaps (2.8) steht und als klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Produktraum der Zeigerzustände und der Eigenzustände der Observablen A interpretiert werden kann.

Wenn man die Umgebung als unkontrollierbar betrachtet, kann dieser Zustandsübergang auch nicht mehr rückgängig gemacht werden und ist damit *praktisch irreversibel*.

Natürlich bleibt zu zeigen, dass es auch konkrete Systeme gibt, die alle aufgestellten Forderungen wenigstens näherungsweise erfüllen. In den entsprechenden theoretischen Betrachtungen wird die Umgebung meist als zusammengesetztes System einer großen Anzahl ($n \to \infty$) einfacher Quantensysteme (wie z. B. harmonische Oszillatoren) modelliert, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet und mit dem betrachteten System wechselwirkt. Diese Wechselwirkung führt dann zur Herausbildung von Mischungen Gaußscher Wellenpakete für den reduzierten Systemzustand (vgl. Qureshi [2012]), die sich auf klassischen Teilchenbahnen bewegen. Fungiert das betrachtete System als Messinstrument, so stellen die lokalisierten Wellenpakete die Zeigerzustände dar.

Im Beispiel des Stern-Gerlach-Experiments wird dann unter dem Einfluss der Dekohärenz aus der Superposition

$$\Phi = c_- \varphi_- \otimes \zeta_- + c_+ \varphi_+ \otimes \zeta_+$$

die Mischung

$$W' = |c_-|^2 P_{[\varphi_- \otimes \zeta_-]} + |c_+|^2 P_{[\varphi_+ \otimes \zeta_+]}$$

Das Kopenhagener Postulat, dass Messinstrumente im Endeffekt klassisch sein müssen, wird daher im Prinzip durch die Dekohärenztheorie gestützt, wobei diese allerdings das Klassisch-Sein mittels der Dekohärenz quantenmechanisch zu erklären versucht, indem Superpositionen von Zeigerzuständen in klassische Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zeigerpositionen umgewandelt werden. Das Kollapspostulat der Kopenhagener Interpretation ermöglicht darüber hinaus irreversible Übergänge, die "realen" Fakten entsprechen. Das Problem, dass jede quantenmechanische Beschreibung eines geschlossenen Systems reversibel ist und alle Transformationen rückgängig gemacht werden können, versucht die Dekohärenztheorie mit Hilfe der Unkontrollierbarkeit der makroskopischen Umgebung zu lösen.

Literatur

L. E. Ballentine. Limitations of the projection postulate. *Found. Phys.*, 20, 1990.

L. E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A modern Development*. World Scientific, Singapore, 1998.

A. Bassi and G. Ghirardi. A General Argument Against the Universal Validity of the Superposition Principle. *Phys. Lett. A*, 275, 2000.

D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables. *Phys. Rev.*, 85, 1952.

N. Bohr. Über Erkenntnisfragen der Quantenphysik. 1958.

W. Bothe. The Coincidence Method. *Nobel lecture 1954*, 1954.

W. Bothe and H. Geiger. Über das Wesen des Comptoneffekts: ein experimenteller Beitrag zur Theorie der Strahlung. *Z. Physik*, 32, 1925.

V. B. Braginsky and F. Ya. Khalili. *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

P. Busch, P. J. Lahti, and P. Mittelstaedt. *The Quantum Theory of Measurement*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

P. Busch, T. Heinonen, and P. Lahti. Heisenberg's Uncertainty Principle. *Phys. Rep. 452*, 2007.

A. H. Compton. X-rays as a branch of optics. *Nobel lecture December 12, 1927*, 1927.

W. Heisenberg. Über den anschaulichen Gehalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Physik*, 43, 1927.

W. Heisenberg. *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie*. Hirzel, 1930.

W. Heisenberg. Die Entwicklung der Deutung der Quantentheorie. *Phys. Bl.*, 12, 1956.

A. Hobson. Re-assessment of the state of Schroedinger's cat. 2012.

R. Laura and L. Vanni. Conditional probabilities and collapse in quantum measurements. *Int. Journal of Theor. Phys.*, 47, 2008.

G. Lüders. Über die Zustandsänderung durch den Messprozess. *Ann. d. Physik*, 1951.

G. Ludwig. *Foundations of Quantum Mechanics I*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

N. D. Mermin. In praise of measurement. *Quantum Information Processing*, 5, 2006.

P. Mittelstaedt. *The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process*. Cambridge University Press, 1998.

M. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.

W. Pauli. *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*. Springer-Verlag, new edition 1990, Berlin, 1933.

T. Qureshi. Decoherence, Time Scales and Pointer States. *Physica A 391*, 2012.

M. Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys. 76*, 2004.

J. v. Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Springer-Verlag, Berlin, 1932.

C. F. v. Weizsäcker. *Aufbau der Physik.* Carl Hanser Verlag, München, 1985.