# Elemente der Verbandstheorie

Michael Zirpel (mz@qlwi.de), München

13. April 2013

## 1 Verband

Eine Menge $L$ mit den Verknüpfungen

$$\sqcup : L \times L \to L, (a,b) \mapsto a \sqcup b$$

$$\sqcap : L \times L \to L, (a,b) \mapsto a \sqcap b$$

bezeichnet man als *Verband* $(L, \sqcup, \sqcap)$, engl. *Lattice,* genau dann, wenn für alle $a,b,c \in L$ gilt:

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c, \quad a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c \tag{1}$$

$$a \sqcup b = b \sqcup a, \quad a \sqcap b = b \sqcap a \tag{2}$$

$$a \sqcup (a \sqcap b) = a, \quad a \sqcap (a \sqcup b) = a \tag{3}$$

Eine Folgerung ist die Idempotenz. In einem Verband $(L, \sqcup, \sqcap)$ gilt für alle $a \in L$

$$a \sqcup a = a, \quad a \sqcap a = a \tag{4}$$

denn es gilt $a = a \sqcap (a \sqcup (a \sqcap b)) = a \sqcap a$.

Beispiele:

1. Jede Mengenalgebra $\mathscr{A}$ auf einer Menge $M$ ist ein Verband $(\mathscr{A}, \cap, \cup)$.

2. Sei $(\mathscr{H}, +, 0, \cdot, \mathbb{C}, \langle , \rangle)$ ein komplexer, separabler Hilbertraum. Die Menge $\mathscr{T}(\mathscr{H})$ der abgeschlossenen Teilräume bildet einen Verband: Die Schnittmenge abgeschlossener Teilräume ist wieder ein abgeschlossener Teilraum

$$A, B \in \mathscr{T}(\mathscr{H}) \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{T}(\mathscr{H})$$

die Vereinigungsmenge i. A. dagegen nicht. Man nimmt als Verbandsvereinigung stattdessen die Schnittmenge alle Teilräume $T$, die alle Vektoren aus $A, B$ enthalten sind

$$A, B \in \mathscr{T}(\mathscr{H}) \Rightarrow A \oplus B := \cap \{T \in \mathscr{T}(\mathscr{H}) \mid A \cup B \subseteq T\} \tag{5}$$

dieser enthält mit allen Elementen aus $A \cup B$ auch beliebige Linearkombinationen. Damit ist $(\mathscr{T}(\mathscr{H}), \cap, \oplus)$ ein Verband.

## 2 Partielle Ordnung

Eine *partielle Ordnungsrelation* $\sqsubseteq$ auf einer Menge $M$ ist eine Relation auf $M$, die die folgenden Bedingungen erfüllt: Für alle $a,b,c \in M$ gilt

$$a \sqsubseteq a \text{ (Reflexivitität)} \tag{6}$$

$$a \sqsubseteq b, b \sqsubseteq a \Rightarrow a = b \text{ (Antisymmetrie)} \tag{7}$$

$$a \sqsubseteq b, b \sqsubseteq c \Rightarrow a \sqsubseteq c \text{ (Transitivität)} \tag{8}$$

Ist auf einer Menge $M$ eine partielle Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ definiert, so bezeichnet man diese Struktur als *partiell geordnete Menge* $(M,\sqsubseteq)$, engl. POSET (Partially Ordered SET) .

## 3 Verband und partielle Ordnung

Jeder Verband $(L,\sqcup,\sqcap)$ ist ein POSET $(L,\sqsubseteq)$, wenn man folgende partielle Ordnungsrelation definiert: Für alle $a,b \in L$

$$a \sqsubseteq b :\Leftrightarrow a \sqcap b = a \tag{9}$$

Es gilt dann für alle $a,b,c \in L$

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcup b = b$$

$$c \sqsubseteq a, c \sqsubseteq b \Rightarrow c \sqsubseteq a \sqcap b$$

$$a \sqsubseteq c, b \sqsubseteq c \Rightarrow a \sqcup b \sqsubseteq c$$

d.h. $a \sqcap b$ ist die *größte untere Schranke (Infimum)* von $\{a,b\}$, $a \sqcup b$ ist die *kleinste obere Schranke (Supremum)* von $\{a,b\}$.

Existieren in einer partiell geordneten Menge $(M,\sqsubseteq)$ zu je zwei Elementen $a,b \in M$ das Infimum $\inf(\{a,b\})$ und das Supremum $\sup(\{a,b\})$, so bildet $M$ mit den Verknüpfungen

$$\sqcap : M \times M \to M, (a,b) \mapsto a \sqcap b := \inf(\{a,b\})$$

$$\sqcup : M \times M \to M, (a,b) \mapsto a \sqcup b := \sup(\{a,b\})$$

einen Verband $(M,\sqcup,\sqcap)$.

Beispiele:

1. Ist $\mathscr{A}$ eine Mengenalgebra auf einer Menge $M$, so definiert die Mengeninklusion $\subseteq$ in dem Verband $(\mathscr{A},\cap,\cup)$ die passende partielle Ordnungsrelation, da $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$. Auf der partiell geordnete Menge $(\mathscr{A},\subseteq)$ entsteht durch $\inf,\sup$ wieder der Verband $(\mathscr{A},\cap,\cup)$

2. Ist $(\mathscr{H},+,0,\cdot,\mathbb{C},\langle,\rangle)$ ein Hilbertraum, so definiert die Mengeninklusion $\subseteq$ in dem Verband der Teilräume $(\mathscr{T}(\mathscr{H}),\cap,\oplus)$ ebenfalls die zugehörige partielle Ordnungsrelation, da $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

## 4 Vollständigkeit

Ein Verband $(L,\sqcup,\sqcap)$ heißt *vollständig,* wenn für jede Teilmenge $A \subseteq L$ Supremum und Infimum in $L$ existieren

$$\bigsqcap_{a\in A} a = \inf(A) \in L, \bigsqcup_{a\in A} a = \sup(A) \in L \tag{10}$$

Ein Verband $(L,\sqcup,\sqcap)$ heißt $\sigma$*-vollständig,* wenn für jede abzählbare Teilmenge $A = \{a_k \in L \mid k \in \mathbb{N}\}$ Supremum und Infimum in $L$ existieren

$$\bigsqcap_{k\in\mathbb{N}} a_k = \inf(A) \in L, \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} a_k = \sup(A) \in L \tag{11}$$

# 5 Beschränktheit, Komplement

Ein Verband $(L, \sqcup, \sqcap, 0, 1)$ heißt *beschränkt,* wenn es ein *größtes* Element $1 \in L$ und ein *kleinstes* Element $0 \in L$ gibt, sodass für alle $a \in L$ gilt

$$0 \sqsubseteq a (\Leftrightarrow 0 \sqcap a = 0) \tag{12}$$

$$a \sqsubseteq 1 (\Leftrightarrow a \sqcap 1 = a) \tag{13}$$

Gilt in einem beschränkten Verband $(L, \sqcup, \sqcap, 0, 1)$ für $a, b \in L$

$$a \sqcup b = 1 \quad a \sqcap b = 0 \tag{14}$$

so bezeichnet man $b$ als *Komplement* von $a$ (und $a$ als Komplement von $b$).

Es folgt: 0 ist ein Komplement von 1 und umgekehrt, und es gibt zu 1 auch kein anderes Komplement als die 0.

Beispiele:

1. Ist $\mathscr{A}$ eine Mengenalgebra auf einer Menge $M$, so ist $(\mathscr{A}, \cap, \cup, \varnothing, M)$ ein beschränkter Verband. Zu jeder Menge $A \in \mathscr{A}$ ist $A^c$ ein Komplement.

2. Ist $(\mathscr{H}, +, 0, \cdot, \mathbb{C}, \langle,\rangle)$ ein Hilbertraum und $(\mathscr{T}(\mathscr{H}), \cap, \oplus)$ der Verband der abgeschlossenen Teilräume, so gilt:

Die Menge mit dem Nullvektor $\{0\}$ bildet einen abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{H}$, der in jedem anderen Teilraum enthalten ist, und ist somit kleinstes Element von $\mathscr{T}(\mathscr{H})$.

$(\mathscr{T}(\mathscr{H}), \cap, \oplus, \{0\}, \mathscr{H})$ ist ein beschränkter Verband.

Es gibt aber zu einem gegebenen Teilraum mitunter mehrere Komplemente. Betrachten wir einen $N-1$-dimensionalen Teilraum $T$ eines $N$-dimensionalen Hilbertraums $\mathscr{H}$. Jeder Vektor $\varphi \in \mathscr{H}$ mit $\varphi \notin T$ spannt einen Teilraum $[\{\varphi\}]$ auf, der ein Komplement zu $T$ ist: Es gilt $[\{\varphi\}] \oplus T = \mathscr{H}$ und $[\{\varphi\}] \cap T = \{0\}$

# 6 Orthokomplement

Gibt es auf einem beschränkten Verband $(L, \sqcup, \sqcap, 0, 1)$ eine Funktion

$$^\perp : L \to L, a \mapsto a^\perp \tag{15}$$

sodass für alle $a, b \in L$ gilt

$$a \sqcup a^\perp = 1, \quad a \sqcap a^\perp = 0 \tag{16}$$

$$a \sqsubseteq b \Rightarrow b^\perp \sqsubseteq a^\perp \tag{17}$$

$$(a^\perp)^\perp = a \tag{18}$$

so bezeichnet man diese Funktion als *Orthokomplement* und den Verband $(L, \sqcup, \sqcap, ^\perp, 0, 1)$ als *orthokomplementär* oder *Orthoverband.*

Ein Orthokomplement ist auch ein Komplement. Es folgt natürlich, dass $0^\perp = 1$ und $1^\perp = 0$.

In jedem orthokomplementären Verband $(L, \sqcup, \sqcap, ^\perp, 0, 1)$ gilt das *de Morgansche Gesetz* für alle $a, b \in L$

$$(a \sqcup b)^\perp = a^\perp \sqcap b^\perp \quad (a \sqcap b)^\perp = a^\perp \sqcup b^\perp \tag{19}$$

Beispiele:

1. Jede Mengenalgebra $\mathscr{A}$ auf einer Menge $M$ ist ein orthokomplementärer Verband $(\mathscr{A},\cap,\cup,^c,\varnothing,M)$.

2. Ist $(\mathscr{H},+,0,\cdot,\mathbb{C},\langle,\rangle)$ ein Hilbertraum und$(\mathscr{T}(\mathscr{H}),\cap,\oplus,\{0\},\mathscr{H})$ der Verband der abgeschlossenen Teilräume, so definiert

$$(\ )^{\perp}:\mathscr{T}(\mathscr{H})\to\mathscr{T}(\mathscr{H}),A\mapsto A^{\perp}:=\left\{\psi\in\mathscr{H}\mid\forall\varphi\in A:\left\langle\psi,\varphi\right\rangle=0\right\}$$

ein Orthokomplement. $\left(\mathscr{T}(\mathscr{H}),\cap,\oplus,^{\perp},\{0\},\mathscr{H}\right)$ ist damit ein orthokomplementärer Verband.

# 7 Orthomodularität, Distributivität

Gilt in einem orthokomplementären Verband $(L,\sqcup,\sqcap,^{\perp},0,1)$ für alle $a,b\in L$

$$a\sqsubseteq b\Rightarrow a\sqcup(b\sqcap a^{\perp})=b \tag{20}$$

so bezeichnet man ihn als *orthomodular.* Gilt in einem orthokomplementären Verband $(L,\sqcup,\sqcap,^{\perp},0,1)$ für alle $a,b\in L$ das Distributivgesetz

$$a\sqcup(b\sqcap c)=(a\sqcup b)\sqcap(a\sqcup c)\quad a\sqcap(b\sqcup c)=(a\sqcap b)\sqcup(a\sqcap c) \tag{21}$$

so bezeichnet man den Verband als *distributiv* bzw. *boolesch,* es handelt sich dann um eine *Boolesche Algebra*. Jeder boolesche Verband ist orthomodular, denn wegen der Distributivität gilt

$$a\sqcup(b\sqcap a^{\perp})=(a\sqcup b)\sqcap(a\sqcup a^{\perp})=a\sqcup b \tag{22}$$

was für $a\sqsubseteq b$ wieder $b$ ergibt.

Beispiel:

1. Jede Mengenalgebra $\mathscr{A}$ auf einer Menge $M$ ist ein boolescher Verband bzw. eine boolesche Algebra $(\mathscr{A},\cap,\cup,^c,\varnothing,M)$.

2. Ist $(\mathscr{H},+,0,\cdot,\mathbb{C},\langle,\rangle)$ ein Hilbertraum, so ist der Verband der abgeschlossenen Teilräume $\big(\mathscr{T}(\mathscr{H}),\cap,\oplus,^{\perp},\{0\},$
orthomodular.

# 8 Orthogonalität

Man kann zwischen den Elementen eines orthokomplementären Verbandes $(L,\sqcup,\sqcap,^{\perp},0,1)$ eine *Orthogonalitätsrelation* definieren. Für alle $a,b\in L$ gilt

$$a\perp b:\iff a\sqsubseteq b^{\perp}$$

Natürlich gilt $a\perp a^{\perp}$. Die Orthogonalitätsrelation ist wegen $0\perp 0$ *nicht* irreflexiv. Sie ist aber symmetrisch ($a\perp b\iff b\perp a$) und i.A. nicht transitiv ($a\perp b,b\perp c\not\Rightarrow a\perp c$). In jedem orthokomplementären Verband $(L,\sqcup,\sqcap,^{\perp},0,1)$ gilt für alle $a,b\in L$

$$a\perp b\Rightarrow a\sqcap b=0$$

In einem booleschen Verband $(L,\sqcup,\sqcap,^{\perp},0,1)$ gilt auch die Umkehrung, d.h. für alle $a,b\in L$ gilt

$$a\perp b\Leftrightarrow a\sqcap b=0$$

Beispiel:

1. Eine Mengenalgebra $\mathscr{A}$ auf einer Menge $M$ ist ein boolescher Verband $(\mathscr{A},\cap,\cup,^c,\varnothing,M)$, daher gilt für alle $A,B\in\mathscr{A}:A\perp B\Leftrightarrow A\cap B=0$.

2. Im Verband der abgeschlossenen Teilräume $(\mathscr{T}(\mathscr{H}),\cap,\oplus,\{0\},\mathscr{H})$ des Hilbertraums $(\mathscr{H},+,0,\cdot,\mathbb{C},\langle,\rangle)$ entspricht die Orthogonalität zweier Teilräume der Orthogonalität aller Vektoren beider Teilräumen.

# 9 Teilalgebra

Eine Teilmenge $T \subseteq L$ eines orthokomplementären Verbandes $\left(L, \sqcap, \sqcup, ^{\perp}, 0, 1\right)$ heißt *Teilalgebra* von $L$, wenn gilt:

$$0, 1 \in T$$

$$a \in T \Rightarrow a^{\perp} \in T$$

$$a, b \in T \Rightarrow a \sqcap b \in T$$

$$a, b \in T \Rightarrow a \sqcup b \in T$$

Für jeden orthokomplementären Verband $\left(L, \sqcap, \sqcup, ^{\perp}, 0, 1\right)$ gilt: Jede Teilalgebra $T$ von $L$ ist ebenfalls ein orthokomplementärer Verband $\left(T, \sqcap, \sqcup, ^{\perp}, 0, 1\right)$. Ist $L$ ein orthomodularer Verband, so ist es auch jede seiner Teilalgebren. Ist $L$ ein boolescher Verband, so ist es auch jede seiner Teilalgebren.

Der mengentheoretische Durchschnitt $S \cap T$ von Teilalgebren $S, T$ von $L$ ist wieder eine Teilalgebra von $L$.

Zu jeder Teilmenge $A \subseteq L$ existiert die kleinste Teilalgebra $T$ mit $A \subseteq T$, wir bezeichnen sie $\mathscr{A}(A)$.

Die kleinste Teilalgebra von $L$ ist $\mathscr{A}(\{0\}) = \mathscr{A}(\{1\}) = \{0, 1\}$, sie ist boolesch. Zu jedem Element $a \in L$ ist die Teilalgebra $\mathscr{A}(\{a\}) = (\{0, a, a^{\perp}, 1\}$ ebenfalls boolesch. Jeder orthokomplementäre Verband kann daher als Vereinigungsmenge seiner booleschen Teilalgebren aufgefasst werden.

Ein Teilalgebra heißt ($\sigma$-)vollständig, wenn sie ein ($\sigma$-)vollständiger Verband ist.

# 10 Kompatibilität

In einem orthokomplementären Verband $\left(L, \sqcap, \sqcup, ^{\perp}, 0, 1\right)$ nennen wir die Elemente $a, b \in L$ *kompatibel* (man sagt auch *kommutierend* oder *gleichzeitig verifizierbar/beobachtbar*), wir schreiben[1]

$$a \updownarrow b$$

genau dann, wenn die von $\{a, b\}$ erzeugte Teilalgebra $\mathscr{A}(\{a, b\})$ boolesch (d.h. distributiv) ist.

Zu jedem Element $a \in L$ ist die Teilalgebra $\mathscr{A}(\{a\})$ boolesch, es gilt also $a \updownarrow a$ sowie $a \updownarrow a^{\perp}$ und $a \updownarrow 0, a \updownarrow 1$. Die Kompatibilitätsrelation ist reflexiv ($a \updownarrow a$), symmetrisch ($a \updownarrow b \iff b \updownarrow a$), aber i.A. nicht transitiv ($a \updownarrow b, b \updownarrow c \not\Rightarrow a \updownarrow c$).

In einem orthomodularen Verband $\left(L, \sqcap, \sqcup, ^{\perp}, 0, 1\right)$ gilt für alle $a, b \in L$:

$$a \sqsubseteq b \Rightarrow a \updownarrow b$$

$$a \perp b \Rightarrow a \updownarrow b$$

Gilt umgekehrt in einem orthokomplementären Verband $\left(L, \sqcap, \sqcup, ^{\perp}, 0, 1\right)$ für alle $a, b \in L$: $a \sqsubseteq b \Rightarrow a \updownarrow b$, so ist der Verband orthomodular, ebenso, wenn für alle $a, b \in L$ gilt $a \perp b \Rightarrow a \updownarrow b$.

In einem booleschen Verband sind natürlich alle Elemente zueinander kompatibel.

[1] andere übliche Schreibweisen sind $a \leftrightarrow b$ und $a\,C\,b$.

# 11 Wahrscheinlichkeitsmaß (Zustand)

Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß (bzw. Zustand) auf einem $\sigma$-vollständigen orthomodularen Verband* $(L,\sqcap,\sqcup,0,1,^{\perp})$ ist eine Funktion

$$p : L \to \mathbb{R}, a \mapsto p(a)$$

die für alle $a \in L$ und eine abzählbaren Indexmenge $I$ folgende Bedingungen erfüllt

$$p(a) \geq 0 \tag{23}$$

$$p(1) = 1 \tag{24}$$

$$(\forall j,k \in I, j \neq k : a_j \perp a_k) \Rightarrow p(\bigsqcup_{k\in I} a_k) = \sum_{k\in I} p(a_k) \tag{25}$$

Folgerung: Für alle $a,b \in L$ gilt

$$p(0) = 0$$
$$a \sqsubseteq b \Rightarrow p(a) \leq p(b)$$
$$p(a) \leq 1$$
$$p(a^{\perp}) = 1 - p(a)$$

Für kompatible Ereignisse $a,b \in L$ (d.h. in einer booleschen Teilalgebra) gilt

$$a \updownarrow b \Rightarrow p(a \sqcup b) = p(a) + p(b) - p(a \sqcap b)$$

Jede boolesche Teilalgebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra. Reduziert auf eine solche Teilalgebra verhält sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß genauso wie in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, denn in einer booleschen Algebra $L$ gilt für alle $a,b \in L$

$$a \perp b \Leftrightarrow a \sqcap b = 0$$

Die obigen Forderungen sind daher in einer booleschen Algebra äquivalent zu den Kolmogoroff-Axiomen.

Beispiel:

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu$ auf einer $\sigma$-vollständigen Mengenalgebra (Kolmogoroff-Axiome).

Beispiel:

Im Verband der abgeschlossenen Teilräume $\left(\mathscr{T}(\mathscr{H}),\cap,\oplus,^{\perp},\{0\},\mathscr{H}\right)$ des Hilbertraums $(\mathscr{H},+,0,\cdot,\mathbb{C},\langle,\rangle)$ (mit $Dim\mathscr{H} > 3$) gehört (nach dem Satz von Gleason) zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß $p$ ein statistischer Operator $S$, sodass für alle Ereignisse $E \in \mathscr{T}(\mathscr{H})$: $p(E) = Tr(SP_E)$, wobei $P_E$ den zu $E$ gehörigen Projektionsoperator kennzeichnet.

# 12 Zufallsvariable (Observable)

Varadarajan[2] definiert eine *Observable X (bzw. Zufallsvariable) auf einem $\sigma$-vollständigen orthomodularen Verband* $(L,\sqcap,\sqcup,0,1,^{\perp})$ als Abbildung aus der $\sigma$-Algebra der Borelmengen der reellen Zahlen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ in den Verband

$$E_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L, B \mapsto E_X(B)$$

[2] V. S. Varadarajan, 1985, Geometrie of Quantum Theory (2nd. Edition), Springer

die für alle abzählbaren Indexmengen $I$, alle $k \in I$ und alle $B_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ folgende Bedingungen erfüllt

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \Rightarrow E_X(B_1) \perp E_X(B_2) \tag{26}$$

$$(\forall j,k \in I, j \neq k : B_j \cap B_k = \varnothing) \Rightarrow E_X(\bigcup_{k\in I} B_k) = \bigsqcup_{k\in I} E_X(B_k) \tag{27}$$

$$E_X(\varnothing) = 0, E_X(\mathbb{R}) = 1 \tag{28}$$

Dabei wird $E_X(B)$ als das Ereignis interpretiert, dass die Observable $X$ einen Wert $x \in B$ hat. Es gilt für alle $B, B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$E_X(B^c) = E_X(B)^\perp \tag{29}$$

$$E_X(B \cup B_2) \Rightarrow E_X(B_1) \sqcup E_X(B_2) \tag{30}$$

$$E_X(B_1 \cap B_2) \Rightarrow E_X(B_1) \sqcap E_X(B_2) \tag{31}$$

Man bezeichnet eine Abbildung mit diesen Eigenschaften auch als *Verbandshomomorphismus* (zwischen dem booleschen Verband der Borelmengen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $L$). Es folgt, dass die Bilder $E_X(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ der Borelmengen eine boolesche Teilalgebra des Verbandes $L$ bilden und daher alle kompatibel sind.

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $p : L \to [0,1]$ auf dem Verband $L$ induziert auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$$p_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], B \mapsto p_X(B) = p(E_X(B))$$

Daher kann der Erwartungswert von $X$ definiert werden durch

$$\langle X \rangle = \int x \, d p_X \tag{32}$$

Jede borelmessbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert eine Zufallsvariable auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Durch

$$E_{f(X)} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L, B \mapsto E_{f(X)} := E_X(f^{-1}(B))$$

wird die *Observable* $f(X)$ *als Funktion der Observablen* $X$ definiert. Es gilt

$$p_{f(X)}(B) = p(E_{f(X)}(B)) = p(E_X(f^{-1}(B))) = p_X(f^{-1}(B))$$

d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Observablen $f(X)$ entspricht der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $f$. Für den Erwartungswert ergibt sich daher

$$\langle f(X) \rangle = \int f(x) d p_X \tag{33}$$

Beispiel:

Im Verband der abgeschlossenen Teilräume $\left(\mathscr{T}(\mathscr{H}), \cap, \oplus, ^\perp, \{0\}, \mathscr{H}\right)$ des Hilbertraums $(\mathscr{H}, +, 0, \cdot, \mathbb{C}, \langle , \rangle)$ definiert eine Varadarajan-Observable $E_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L, B \mapsto E_X(B)$ ein *projektorwertiges Maß*

$$P_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathscr{H}), B \mapsto P_X(B) = P_{E_X}(B)$$

wobei $P_{E_X}(B)$ den zum Teilraum $E_X$ gehörigen Projektionsoperator bezeichnet. Jedes Projektorwertige Maß definiert einen selbstadjungierten Operator.