Symmetrisches und antisymmetrisches Tensorprodukt, direkte Summe und Fockraum

Michael Zirpel (mz@qlwi.de), München

13. April 2013

Im Folgenden ist $(\mathscr{H}, +, 0, \cdot, \mathbb{C}, \langle\ ,\ \rangle)$ ein komplexer, separabler Hilbertraum, $\|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi, \varphi\rangle}$ für $\varphi \in \mathscr{H}$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm und I_D eine Indexmenge, für die gilt: ist $\dim\mathscr{H}$ endlich, so ist $I_D = \{1, 2, ..., \dim\mathscr{H}\}$, andernfalls ist $I_D = \mathbb{N}$.

1 Symmetrische und Antisymmetrische Teilräume des Tensorproduktes

Zur Physik: Wenn ein zusammengesetztes System aus n Teilchen besteht, die einzeln im Hilbertraum $\mathscr{H}$ beschrieben werden, müsste das zusammengesetzte n-Teilchensystem durch das n-fache Tensorprodukt

$$\mathscr{H}^{\otimes n} = \mathscr{H} \otimes ... \otimes \mathscr{H}\ (n - \text{mal}) \tag{1}$$

beschrieben werden. Dies ist aber *nicht* der Fall, wenn die Teilchen *nicht unterscheidbar* sind: Zustände des Gesamtsystems, die sich nur durch die Vertauschung von zweier Teilchen unterscheiden, können physikalisch dann nicht unterschieden werden.

Bei der Vertauschung der Teilchen dürfen sich daher die Erwartungswerte aller Observablen nicht ändern, d.h. der Zustandsvektor des Gesamtsystems darf sich höchstens um einen Phasenfaktor $c\in \mathbb{C}$ mit $|c|$=1 ändern. Am Beispiel einer Wellenfunktion $\psi \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^{3n})$ für ein n-Teilchensystem:

$$\varphi(r_1, ..., r_j, ...r_k, ..., r_n) = c\varphi(r_1, ..., r_k, ...r_j, ..., r_n) \tag{2}$$

Da eine erneute Vertauschung des gleichen Teilchenpaars wieder die Ausgangsituation ergibt, gilt für diesen Phasenfaktor

$$c^2 = 1 \tag{3}$$

und damit $c = \pm 1$. Die Erfahrung (bzw. das *Spin-Statistik-Theorem* der relativistischen Quantenfeldtheorie) lehrt, dass je nach Teilchenart, *Boson* (ganzahliger Spin) oder *Fermion* (halbzahliger Spin), die Wellenfunktion bei einer Vertauschung unverändert bleibt ($c = 1$) oder das Vorzeichen wechselt ($c = -1$).

Zur Mathematik: Eine Funktion $\varphi \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)^{\otimes n}$ ist *symmetrisch*, wenn sie bei Vertauschung zweier beliebiger Argumente gleich bleibt

$$\varphi(r_1, ..., r_j, ...r_k, ..., r_n) = \varphi(r_1, ..., r_k, ...r_j, ..., r_n) \tag{4}$$

und *antisymmetrisch*, wenn sie das Vorzeichen wechselt

$$\varphi(r_1, ..., r_j, ...r_k, ..., r_n) = -\varphi(r_1, ..., r_k, ...r_j, ..., r_n) \tag{5}$$

Zur Beschreibung eines n-Teilchensystems verwendet man daher statt des Hilbertraums $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)^{\otimes n} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^{3n})$ den abgeschlossenen Teilraum der symmetrischen Funktionen $\mathscr{L}^2_+(\mathbb{R}^{3n})$ für Bosonen bzw. den Teilraum antisymmetrischen Funktionen $\mathscr{L}^2_-(\mathbb{R}^{3n})$ für Fermionen.

Da beliebige Linearkombinationen von (anti-)symmetrischen Funktionen wieder (anti-)symmetrisch sind und der Grenzwert einer Folge von (anti-)symmetrischen Funktionen eine (anti-)symmetrische Funktion ist, sind $\mathscr{L}^2_+(\mathbb{R}^{3n})$ und $\mathscr{L}^2_-(\mathbb{R}^{3n})$ abgeschlossene Teilräume von $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^{3n})$.

Der Hilbertraum $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^{3n})$ ist das n-fache Tensorprodukt $\mathscr{H}^{\otimes n} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)^{\otimes n}$ des 1-Teilchen-Hilbertraums $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Ist $\{\alpha_k \in \mathscr{H}\}_{k \in I_D}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$, so bilden alle n-fachen Tensorprodukte $\alpha_{k_1} \otimes ... \otimes \alpha_{k_n}$ mit $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}^{\otimes n} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)^{\otimes n}$. Diese Basisvektoren haben folgende Darstellung

$$\alpha_{k_1,...,k_n}(r_1, ...r_n) = \alpha_{k_1}(r_1) \cdot ... \cdot \alpha_{k_n}(r_n) \tag{6}$$

Zwar liegen diese Basisvektoren (bis auf wenige Ausnahmen) nicht in den Teilräumen $\mathscr{L}^2_+(\mathbb{R}^{3n})$ und $\mathscr{L}^2_-(\mathbb{R}^{3n})$, dennoch muss es möglich sein, alle Vektoren dieser Teilräume als Linearkombinationen dieser Basisvektoren darzustellen. Damit eine solche Linearkombination symmetrisch ist, müssen die verwendeten Komponenten selbst in symmetrischer Form auftreten, d.h. zusammen mit $\alpha_{k_1}(r_1) \cdot ... \cdot \alpha_{k_n}(r_n)$ muss auch jede Permutation $\alpha_{k_{P(1)}}(r_1) \cdot ... \cdot \alpha_{k_{P(n)}}(r_n)$ mit gleichem Gewicht in der Linearkombination auftreten. Zu jedem Basisvektor $\alpha_{k_1}(r_1) \cdot ... \cdot \alpha_{k_n}(r_n)$ gibt es einen symmetrisierten Vektor

$$\alpha^+_{k_1,...,k_n}(r_1, ...r_n) = \sum_{P \in \mathscr{S}_n} \alpha_{k_{P(1)}}(r_1) \cdot ... \cdot \alpha_{k_{P(n)}}(r_n) \tag{7}$$

der in $\mathscr{L}^2_+(\mathbb{R}^{3n})$ liegt. Die Menge dieser nicht normierten Vektoren spannt $\mathscr{L}^2_+(\mathbb{R}^{3n})$ auf (aber nicht alle sind verschieden!). Man kann allgemeiner im Hilbertraum $\mathscr{H}^{\otimes n}$ die linearen Operatoren

$$S_+ = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathscr{S}_n} P \tag{8}$$

und

$$S_- = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathscr{S}_n} (-1)^{g(P)} P \tag{9}$$

definieren, die beliebige Vektoren der Produktbasis und ihre Linearkombinationen (anti)symmetrisieren. Dabei ist $\mathscr{S}_n$ die Menge der Permutationen von n Elementen und g(P) der Grad der Permutation P (0 für eine gerade, 1 für eine ungerade Anzahl von Transpositionen).

$$S_+(\alpha_{k_1} \otimes ... \otimes \alpha_{k_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathscr{S}_n} \alpha_{P(k_1)} \otimes ... \otimes \alpha_{P(k_n)} \tag{10}$$

$$S_-(\alpha_{k_1} \otimes ... \otimes \alpha_{k_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathscr{S}_n} (-1)^{g(P)} \alpha_{P(k_1)} \otimes ... \otimes \alpha_{P(k_n)} \tag{11}$$

Die Operatoren S_+ und S_- sind idempotent und selbstadjungiert und daher Projektionsoperatoren. Sie projizieren auf den abgeschlossenen Teilraum der symmetrischen Vektoren

$$\mathscr{H}^{\otimes n}_+ = S_+ \mathscr{H}^{\otimes n} \tag{12}$$

bzw. auf den abgeschlossenen Teilraum der antisymmetrischen Vektoren

$$\mathscr{H}^{\otimes n}_- = S_- \mathscr{H}^{\otimes n} \tag{13}$$

Für $n > 2$ bilden sie aber keine Zerlegung der Einheit, es gilt dann

$$S_+ + S_- \neq 1 \tag{14}$$

Will man die Basisvektoren explizit konstruieren, so ist es sinnvoll die Darstellung zu wechseln. Da jeweils alle Permutationen auftauchen, ist nur relevant, wie oft jeder Einteilchenbasisvektor im Tensorprodukt vorkommt. Dies führt zur Besetzungszahlendarstellung. Statt des Vektors $\sum_{P\in\mathscr{S}_n} \alpha_{P(k_1)} \otimes ... \otimes \alpha_{P(k_n)}$ betrachtet man die Anzahlen $n_1, n_2, ...$, mit der jeder Vektor $\alpha_1, \alpha_2, ...$ in $\alpha_{k_1} \otimes ... \otimes \alpha_{k_n}$ auftaucht (also physikalisch gesehen die Anzahlen der Teilchen in den Zuständen $\alpha_1, \alpha_2, ...$):

$$\left|n_1, n_2, ...\right\rangle \tag{15}$$

mit n_1, n_2, ... $\in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{k\in I_D} n_k = n$ und erhält damit eine eindeutige, orthogonale Darstellung der Basisvektoren von $\mathscr{H}_+^{\otimes n}$. Wir nehmen dabei an, dass die Vektoren in dieser Darstellung normiert sind, dass also die Besetzungszahlenvektoren eine Orthonomalbasis darstellen:

$$\left\langle n_1, n_2, ... | m_1, m_2 ...\right\rangle = \delta_{n_1,m_1}\delta_{n_2,m_2}... \tag{16}$$

Eine explizite Darstellung ergibt sich folgendermaßen: In der unendlichen Liste der Besetzungszahlen sind höchstens n Stellen ungleich 0. Sind $k_1, ..., k_m$ diese Stellen (mit $m \leq n$), in denen die Besetzungszahlen ungleich 0 sind, so ergibt sich

$$\left|..., n_{k_1}, ..., n_{k_m}, 0, ...\right\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{n!}{n_{k_1}!...n_{k_m}!}} S_+\left(\alpha_{k_1}^{\otimes n_{k_1}} \otimes ... \otimes \alpha_{k_m}^{\otimes n_{k_m}}\right) = \tag{17}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_{k_1}!...n_{k_m}!}\frac{1}{n!}} \sum_{P\in\mathscr{S}_n} \left(\alpha_{k_{P(1)}}^{\otimes n_{k_{P(1)}}} \otimes ... \otimes \alpha_{k_{P(m)}}^{\otimes n_{k_{P(m)}}}\right)$$

Analoges gilt für $\mathscr{H}_-^{\otimes n}$ mit dem einzigen Unterschied, dass als Besetzungszahlen wegen der Antisymmetrie nur 0 und 1 auftreten: n_1, n_2, ... $\in \{0,1\}$. Daher gibt es genau n Stellen, in denen die Besetzungszahlenliste mit 1 besetzt ist und es gilt

$$\left|..., 1_{k_1}, ..., 1_{k_n}, ...\right\rangle =$$

$$\sqrt{n!} S_-\left(\alpha_{k_1} \otimes ... \otimes \alpha_{k_n}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{n!}} \sum_{P\in\mathscr{S}_n} (-1)^{\mathrm{g}(P)} \left(\alpha_{k_{P(1)}} \otimes ... \otimes \alpha_{k_{P(n)}}\right)$$

Der letzte Ausdruck erscheint manchmal in der Form der *Slater-Determinante*

$$\sqrt{\frac{1}{n!}} \begin{vmatrix} \alpha_{k_1}(r_1) & ... & \alpha_{k_n}(r_1) \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{k_1}(r_n) & ... & \alpha_{k_n}(r_n) \end{vmatrix} \tag{18}$$

Betrachtet man $\mathscr{H}_+^{\otimes n}$,$\mathscr{H}_-^{\otimes n}$ als Hilberträume, so sind natürlich auch alle linearen Operatoren in diesen Räumen *symmetrisch* in dem Sinn, dass sie (anti)symmetrische Vektoren auf (anti)symmetrische Vektoren abbilden. Operatoren aus $\mathscr{H}^{\otimes n}$ haben i. A. nicht diese Eigenschaft.

Beispiel: Der Operator

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \otimes ... \otimes X_k \otimes ... \otimes 1 \tag{19}$$

ist symmetrisch, der Operator $X_2 = 1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes 1$ nicht.

2 Direkte Summe von Hilberträumen

Sei I eine abzählbare Indexmenge und $(\mathscr{H}_k)$ mit $k \in I$ eine Folge von Hilberträumen. Die *direkte Summe* der Hilberträume $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \ldots$

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \ldots = \bigoplus_{k \in I} \mathscr{H}_k \tag{20}$$

ist die Menge aller Folgen (φ_k) mit $\varphi_k \in \mathscr{H}_k$ für alle $k \in I$, für die gilt

$$\sum_{k \in I} \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k \in I} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle < \infty \tag{21}$$

(Bei einer endlichen Indexmenge I ist diese Bedingung natürlich immer erfüllt). Definiert man eine *Addition* auf $\mathscr{H}$ durch

$$(\varphi_k) + (\chi_k) = (\varphi_k + \chi_k) \tag{22}$$

sowie eine *Multiplikation mit Skalaren* $c \in K$ durch

$$c \cdot (\varphi_k) = (c \cdot \varphi_k) \tag{23}$$

für alle $k \in I$, so erhält man einen Vektorraum, der mittels des *Skalarprodukts*

$$\langle (\varphi_k), (\varphi_k) \rangle = \sum_{k \in I} \langle \varphi_k, \chi_k \rangle \tag{24}$$

zum *Hilbertraum* wird. (Die Vollständigkeit kann genauso bewiesen werden, wie beim Hilbertschen Folgenraum l_2.) Betrachtet man $\mathbb{C}$ als eindimensionalen Hilbertraum, so kann man den n-dimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C}^n$ als direkte Summe $\bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C}$ auffassen und den Hilbertschen Folgenraum l_2 als $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}$. Die Menge der Folgen, bei denen an der Stelle $k \in I$ beliebige Elemente des Hilbertraums $\mathscr{H}_k$ stehen und sonst alle Stellen mit den jeweiligen Nullvektoren besetzt sind, also Folgen der Form

$$(0, \ldots, 0, \varphi_k, 0, \ldots) \tag{25}$$

bilden einen vollständigen Teilraum von $\mathscr{H}$, der zu $\mathscr{H}_k$ isomorph ist und daher mit $\mathscr{H}_k$ identifiziert wird. Man schreibt für einen Vektor der Form $(0, \ldots, 0, \varphi_k, 0, \ldots)$ einfach φ_k und für $\varphi = (\varphi_k) \in \mathscr{H}$

$$\varphi = \sum_{k \in I} \varphi_k \tag{26}$$

Dabei ist $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0$ für $j \neq k$ und die Teilräume, die durch $\mathscr{H}_k$ und $\mathscr{H}_j$ gegeben sind, sind für $j \neq k$ orthogonal

$$\mathscr{H}_j \perp \mathscr{H}_k \tag{27}$$

Damit ergibt sich aber: Ist für alle $k \in I$ $\{\beta_{j,k} \in \mathscr{H}_k\}_{j \in I_k}$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\mathscr{H}_k$ mit abzählbarer Indexmenge I_k, so bildet die Vereinigungsmenge aller dieser Basisvektoren $\{\beta_{j,k} \in \mathscr{H}_k\}_{j \in I_k, k \in I}$ eine Basis von $\bigoplus_{k \in I} \mathscr{H}_k$:

$$\varphi = \sum_{k \in I} \varphi_k = \sum_{k \in I} \sum_{j \in I_k} \langle \beta_{j,k}, \varphi_k \rangle \beta_{j,k} = \sum_{k \in I} \sum_{j \in I_k} \langle \beta_{j,k}, \varphi \rangle \beta_{j,k} \tag{28}$$

Für endlichdimensionale Hilberträume gilt

$$\dim \bigoplus_{k \in I} \mathscr{H}_k = \sum_{k \in I} \dim \mathscr{H}_k \tag{29}$$

Ist $\mathscr{H}$ ein beliebiger Hilbertraum und $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{H}$ ein Teilhilbertraum, so ist $\mathscr{H} = \mathscr{T} \oplus \mathscr{T}^\perp$, wobei $\mathscr{T}^\perp = \{\varphi \in \mathscr{H} \mid \forall \chi \in T : \langle \varphi, \chi \rangle = 0\}$. Ist für alle $k \in I$ der Hilbertraum $\mathscr{H}_k$ separabel, so ist auch die direkte Summe $\bigoplus_{k \in I} \mathscr{H}_k$ separabel.

3 Fockraum

Ist $\mathscr{H}$ ein separabler Hilbertraum (der ein einzelnes Teilchen beschreibt), so ist der Fockraum $\mathscr{F}_+(\mathscr{H})$ bzw. $\mathscr{F}_-(\mathscr{H})$ die abzählbar unendliche direkte Summe der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensorprodukte $\mathscr{H}_+^{\otimes n}$ bzw. $\mathscr{H}_-^{\otimes n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das 0-fache Tensorprodukt ist durch den eindimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C} = \mathscr{H}_+^{\otimes 0} = \mathscr{H}_-^{\otimes 0}$ gegeben und das 1-fache Tensorprodukt durch $\mathscr{H}_+^{\otimes 1} = \mathscr{H}_-^{\otimes 1} = \mathscr{H}$. Somit gilt

$$\mathscr{F}_+(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_+^{\otimes n} \tag{30}$$

$$\mathscr{F}_-(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_-^{\otimes n} \tag{31}$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die (anti)symmetrischen Tensorprodukte abgeschlossene Teilräume des entsprechenden Fockraumes sind, eignet sich dieser zur Beschreibung von Systemen mit beliebiger Anzahl gleicher Teilchen. Zwingend notwendig wird die Verwendung des Fockraums in der Quantenfeldtheorie bei Systemen mit variabler Teilchenanzahl: Ein Zustandsvektor ψ aus $\mathscr{F}_+(\mathscr{H})$ bzw. $\mathscr{F}_-(\mathscr{H})$ hat die Form

$$\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots \tag{32}$$

wobei $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ jeweils Einheitsvektoren der Räume $\mathscr{H}_+^{\otimes 0}, \mathscr{H}_+^{\otimes 1}, \mathscr{H}_+^{\otimes 2}, \ldots$ bzw. $\mathscr{H}_-^{\otimes 0}, \mathscr{H}_-^{\otimes 1}, \mathscr{H}_-^{\otimes 2}, \ldots$ darstellen und $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$ ist. Ein solcher Zustand entspricht i. A. nicht einer definierten Teilchenzahl: die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung genau 2 Teilchen zu finden, beträgt beispielsweise $|c_2|^2$, der Erwartungswert der Teilchenzahl ist

$$\langle N \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 k \tag{33}$$

3.1 Besetzungszahlendarstellung

Ist $\{\alpha_k \in \mathscr{H}\}_{k \in I_D}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$, so bilden die Vektoren der oben eingeführten Besetzungszahlendarstellung eine Orthonormalbasis des Fockraumes

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle \tag{34}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n = \sum_{k \in I_D} n_k < \infty$ und $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}_0$ für $\mathscr{F}_+(\mathscr{H})$ bzw. $n_1, n_2, \ldots \in \{0, 1\}$ für $\mathscr{F}_-(\mathscr{H})$. Für jeden Basisvektor legt die Summe der Anzahlen $\sum_{k \in I_D} n_k = n$ fest, zu welchem n-Teilchen-Teilraum der Basisvektor gehört, in jedem n-Teilchen-Teilraum werden die gleichen Basisvektoren verwendet, wie beim n-fachen (anti)symmetrischen Tensorprodukt. Der 0-Teilchen-Teilraum ist eindimensional, es gibt nur den einen Zustandsvektor

$$|0, 0, \ldots\rangle \tag{35}$$

den man als Vakuumzustand bezeichnet und abkürzend mit $|0\rangle$ kennzeichnet. Der Vakuumzustand darf nicht mit dem Nullvektor des Hilbertraums verwechselt werden, für den man einfach 0 schreibt

$$|0\rangle \neq 0 \tag{36}$$

Die Besetzungszahlen werden natürlich immer bzgl. einer bestimmten Orthonormalbasis des zugrundeliegenden Hilbertraum $\mathscr{H}$ angegeben (Basistransformationen werden wir noch behandeln). Im Allgemeinen handelt es sich dabei um Eigenvektoren eines vollständigen Satzes kommutierender selbstadjungierter Operatoren in $\mathscr{H}$. Lediglich der Vakuumzustand gehört als Basisvektor zu jeder Orthonormalbasis des Fockraums.

3.2 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Ist $\mathscr{H}$ ein separabler Hilbertraum, $\mathscr{F}_+(\mathscr{H})$ der zugehörige symmetrische Fockraum und $\{\alpha_k \in \mathscr{H}\}_{k\in I_D}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$, so kann man in der Besetzungszahlendarstellung bzgl. dieser Basis folgende lineare Operatoren einführen, indem man für alle $k \in I_D$ und $n_k > 0$ definiert

$$A_k\big|...,n_k,...\big\rangle = \sqrt{n_k}\big|...,n_k-1,...\big\rangle \tag{37}$$

Für $n_k = 0$ ist

$$A_k\big|...,0_k,...\big\rangle = 0 \tag{38}$$

der Nullvektor im Vektorraum. Es folgt für den adjungierten Operator $A_k^\dagger$

$$A_k^\dagger\big|...,n_k,...\big\rangle = \sqrt{n_k+1}\big|...,n_k+1,...\big\rangle \tag{39}$$

denn es gilt

$$\big\langle...,n_k+1,...|A_k^\dagger(...,n_k,...)\big\rangle = \big\langle A_k(...,n_k+1,...)|...,n_k,...\big\rangle = \sqrt{n_k+1} \tag{40}$$

Da in der Besetzungszahldarstellung durch die Operatoren $A_k^\dagger$ und A_k jeweils die Besetzungszahl an der Stelle k (und damit die Teilchenzahl) um 1 erhöht bzw. erniedrigt wird, spricht man von *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperatoren*. Der Operator $N_k = A_k^\dagger A_k$ ist selbstadjungiert, und, wie man leicht sieht, gilt für alle $k \in I_D$ und alle $n_k \in \mathbb{N}_0$

$$A_k^\dagger A_k\big|...,n_k,...\big\rangle = n_k\big|...,n_k,...\big\rangle \tag{41}$$

Er gibt die Anzahl der Teilchen im Zustand α_k. Die gesamte Teilchenanzahl ergibt sich dann durch den Operator

$$N = \sum_{k\in I_D} A_k^\dagger A_k \tag{42}$$

Für alle $j,k \in \mathbb{N}$ gelten die Vertauschungsrelationen

$$A_jA_k - A_jA_k = 0 \tag{43}$$

$$A_j^\dagger A_k^\dagger - A_k^\dagger A_j^\dagger = 0 \tag{44}$$

$$A_jA_k^\dagger - A_j^\dagger A_k = \delta_{j,k} \tag{45}$$

Es ist offensichtlich, dass man ausgehend vom Vakuumzustand $|0\rangle$ mit Hilfe von Produkten von Erzeugungsoperatoren jeden beliebigen Basiszustand des Fockraums erzeugen kann:

$$\big|n_1,n_2,...\big\rangle = \sqrt{\frac{1}{n_1!n_2!...}}(A_k^\dagger)^{n_1}(A_k^\dagger)^{n_2}...|0\rangle \tag{46}$$

und damit jeden Vektor $\psi \in \mathscr{F}_+(\mathscr{H})$

$$\psi = \sum_{n_1,n_2,...\in\mathbb{N}} c_{n_1,n_2,...}\sqrt{\frac{1}{n_1!n_2!...}}(A_k^\dagger)^{n_1}(A_k^\dagger)^{n_2}...|0\rangle \tag{47}$$

Im Grund handelt es sich dabei um eine Darstellung des Hilbertraums im Rahmen der Algebra der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

Für den antisymmetrischen Fockraum $\mathscr{F}_-(\mathscr{H})$ gilt analog (für alle $k \in \mathbb{N}$)

$$A_k\big|...,1_k,...\big\rangle = (-1)^{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} n_k}\big|...,0_k,...\big\rangle \tag{48}$$

$$A_k\big|...,0_k,...\big\rangle = 0 \tag{49}$$

sowie

$$A_k^\dagger\big|...,1_k,...\big\rangle = (-1)^{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} n_k}\big|...,0_k,...\big\rangle \tag{50}$$

$$A_k\big|...,1_k,...\big\rangle = 0 \tag{51}$$

und

$$A_k^\dagger A_k\big|...,n_k,...\big\rangle = n_k\big|...,n_k,...\big\rangle \tag{52}$$

und die Antikommutatorrelationen

$$A_jA_k + A_jA_k = 0 \tag{53}$$

$$A_j^\dagger A_k^\dagger + A_k^\dagger A_j^\dagger = 0 \tag{54}$$

$$A_jA_k^\dagger + A_j^\dagger A_k = \delta_{j,k} \tag{55}$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren hängen von der Orthonormalbasis $\{\alpha \in \mathscr{H}\}_{k\in I_D}$ ab. Wenn man eine andere Orthonormalbasis $\{\beta \in \mathscr{H}\}_{j\in I_D}$ verwendet mit

$$\big|\beta_k\big\rangle = \sum_{j\in I_D} c_{j,k}\big|\alpha_j\big\rangle \tag{56}$$

und für alle $j,k \in I_D$

$$c_{j,k} = \big\langle \alpha_j, \beta_k\big\rangle \tag{57}$$

so gilt für die zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$B_k^\dagger = \sum_{j\in I_D} c_{j,k}A_j^\dagger \tag{58}$$

$$B_k = \sum_{j\in I_D} c_{k,j}A_j \tag{59}$$

Man kann leicht überprüfen, dass die obigen Relationen alle erfüllt sind. Weiterhin gilt

$$N = \sum_{j\in I_D} A_j^\dagger A_j = \sum_{k\in I_D} B_k^\dagger B_k \tag{60}$$

d.h. wie zu erwarten ist, hängt die Gesamtanzahl der Teilchen nicht von der Basis ab.

Literatur

P. Teller, 1995, An interpretive introduction to Quantum Field Theory, Princeton University Press.

L. E. Ballentine, 1998, Quantum Mechanics, A Modern Development, World Scientific

A. Messiah, 1979, Quantenmechanik Bd. 2, de Gruyter