

# Die Bell-CHSH-Ungleichung und Bells Theorem

Michael Zirpel (mzirpel@qlwi.de)

Die berühmte Arbeit von Einstein, Podolsky und Rosen (EPR 1935) endet mit der Feststellung: "Während wir somit gezeigt haben, dass die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität liefert, lassen wir die Frage offen, ob eine solche Beschreibung existiert oder nicht. Wir glauben jedoch, dass eine solche Theorie möglich ist."

Dies wirft die Frage auf, ob die Quantenmechanik eine unvollständige Theorie ist, die durch die Einführung weiterer Größen so vervollständigt werden kann, dass eine *realistische* Theorie entsteht, in der alle Größen unabhängig von Beobachtungen eindeutig definierte Werte haben.

Nun stellt eine Reihe von Theoremen (Kochen-Specker, v. Neumann/Gleason) klar, dass eine solche realistische Theorie nicht allen quantenmechanischen Observablen zu jedem Zeitpunkt bestimmte Werte zuordnen kann. Dies macht aber eine realistische Theorie nicht unmöglich: In der Bohmschen Mechanik haben beispielsweise nur die Teilchenorte immer bestimmte Werte, andere (mit dem Ort nicht kommutierende) quantenmechanischen Observablen sind dagegen außerhalb ihrer Messungen undefiniert und lediglich als Produkte der entsprechenden Messvorrichtungen (und der Wellenfunktion) anzusehen.

In der Auseinandersetzung mit diesem Thema Bell (1964, 1966) stellte J. S. Bell die nach ihm benannte Ungleichung auf, die in allen realistischen Theorien gilt, aber in der Quantenmechanik - unter gewissen Bedingungen - verletzt wird. Die Folgerung, die auch als *Bells Theorem* bezeichnet wird, lautet nach Shimony (2016):

*Keine physikalische Theorie, die realistisch und lokal ist, kann in allen statistischen Aussagen mit der Quantenmechanik übereinstimmen.*

Unter *Lokalität* ist dabei das Fehlen von "spukhaften Fernwirkungen" (Einstein) zwischen räumlich getrennten Systemteilen zu verstehen: alle Einwirkungen eines Teilsystems auf ein räumlich entferntes Teilsystem können sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten (und werden durch eine Wechselwirkung vermittelt).

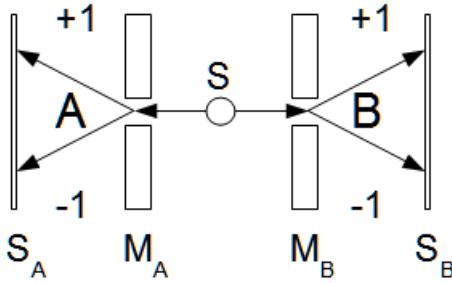
Die Verletzung der Bellschen Ungleichung kann im Experiment ("Bell test experiment") überprüft werden. Am bekanntesten sind die von Aspect *et al.* (1982) durchgeführten Photonen-Experimente, die erstmals schlüssig die von der Quantenmechanik vorhergesagte Verletzung der Bellschen Ungleichung bestätigten. In jüngerer Zeit wurden von Gisin *et al.* (2008) Präzisionsmessungen durchgeführt, in denen die Entfernung zwischen zwei Teilsystemen fast 20km betrug und als untere Schranke für die Ausbreitung einer möglichen Fernwirkung ein Vielfaches der Lichtgeschwindigkeit ermittelt wurde (weitere aktuelle Experimente s. [thebigbelltest.org](http://thebigbelltest.org)).

Wir behandeln im Folgenden eine etwas abgewandelte Form der Ungleichung von Bells Originalarbeit, die sogenannte *Bell-CHSH-Ungleichung*, die auf J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt (1969) zurückgeht und zeigen, dass sie als Satz der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie formuliert werden kann. In der Quantenmechanik gilt in entsprechenden Zusammenhängen die schwächere *Tsirelson-Ungleichung* (Cirel'son, 1980). Ein Beispiel zeigt dann, dass quantenmechanische Systeme die Bell-CHSH-Ungleichung verletzen können, aber dennoch die Tsirelson-Ungleichung erfüllen. Das eigentliche Theorem, d.h. der Zusammenhang mit der Nicht-Lokalität, wird schließlich mit Hilfe klassischer Automaten verständlich gemacht.

# 1 Bell-CHSH-Experiment

Auch wenn die Bell-CHSH-Ungleichung einen abstrakten Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie darstellt, ist es sinnvoll, das entsprechende Gedankenexperiment an den Anfang zu stellen. Der grundätzliche Aufbau des Experiments stammt von Bohm (1951), der damit die Darstellung der EPR-Problematik vereinfachte, indem er Spin-Messungen an einem Teilchenpaar mit Hilfe von Stern-Gerlach-Apparaturen behandelte:

Eine Teilchenquelle  $S$  erzeugt Teilchenpaare, die in entgegengesetzter Richtung ausgesendet werden. In einer gewissen Entfernung stehen auf beiden Seiten Magnete  $M_A, M_B$ , die von den Experimentatoren Alice und Bob zur Spinmessung verwendet werden. Diese Magneten spalten den Teilchenstrahl in zwei Teilstrahlen auf, die den Spinkomponenten der Teilchen  $(+1, -1)$  entsprechen.



Alice und Bob können ihre Magnete  $M_A, M_B$  in unterschiedliche Richtungen drehen und so die Spinkomponenten der Teilchen in verschiedenen Richtungen messen, indem sie an den Schirmen  $S_A, S_B$  detektieren, in welchem Teilstrahl  $(+1, -1)$  ein Teilchen auftrifft.

Im EPR-Bohm-Experiment messen Alice und Bob wahlweise eine Spinkomponente in je zwei verschiedenen Raumrichtungen. Man kann dies abstrakt als die Messung von je zwei Observablen  $A_0, A_1$  bzw.  $B_0, B_1$  betrachten, die jeweils nur die Werte  $-1, +1$  annehmen können.

Die Observablen  $A_0$  und  $A_1$  bzw.  $B_0$  und  $B_1$  können nicht gleichzeitig gemessen werden. Alice muss sich vor jeder Messung durch Drehung des Magneten entscheiden, ob sie  $A_0$  oder  $A_1$  messen will, ebenso Bob mit  $B_0$  oder  $B_1$ . Je nach Wahl von Alice und Bob wird also in einem Einzelexperiment mit einem Teilchenpaar eines der folgenden Observablenpaare gemessen:

$$(A_0, B_0), (A_1, B_0), (A_0, B_1), (A_1, B_1)$$

Ein Beispiel für die Ergebnisse eines Einzelexperiments wäre

$$(A_0, B_1) = (-1, 1)$$

In der Wiederholung der Einzelexperimente in Messreihen mit unterschiedlicher Auswahl der Observablen kann man für alle vier Observablenpaare die relativen Häufigkeiten der Messergebnisse ermitteln, aber auch die Mittelwerte der Produkte  $A_0 B_0, A_1 B_0, A_0, B_1, A_1, B_1$ , die jeweils die Korrelation angeben und im Folgenden genauer untersucht werden. Im Idealfall sind die Auswahlen der beiden Experimentatoren dabei stochastisch unabhängig voneinander und gleichverteilt, was in der Praxis durch Zufallsgeneratoren sichergestellt wird.

Bohm betrachtete Spinmessungen in  $X$ - und  $Z$ -Richtung an einem Zustand mit Gesamtspin 0. Wenn Alice und Bob in diesem Fall die gleiche Spinobservable messen, sind die Ergebnisse perfekt anti-korrielt (Produkt  $-1$ ), andernfalls sind die Ergebnisse stochastisch unabhängig.

## 2 Bell-CHSH-Ungleichung für klassische Zufallsvariablen

Wenn man das Experiment im Rahmen der klassischen statistischen Mechanik behandelte, wäre es naheliegend, die Teilchenpaare als zwei starre Körper zu betrachten und die vier Größen  $A_0, A_1, B_0, B_1$  als Funktionen des Drehimpulses dieser Körper (vgl. Peres (1995)). Dies ist nicht die einzige möglich Beschreibung, die Details eines solchen Beschreibung spielen aber für die folgenden Überlegungen keine Rolle. Wichtig ist nur: Wie alle mechanischen Größen wären  $A_0, A_1, B_0, B_1$  Funktionen auf dem Phasenraum des Gesamtsystems, dessen Punkte die vollständige Zustandsbeschreibung darstellen<sup>1</sup>.

Mathematisch - im Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie - betrachtet handelt es sich bei den vier Größen  $A_0, A_1, B_0, B_1$  dann um Zufallsvariablen (borelmessbare Funktionen) auf einem Ereignisraum (dem Phasenraum und die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen) und es gilt die *Bell-CHSH-Ungleichung*:

*Ist  $\Omega$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $\Omega$  und sind  $a_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, b_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, b_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Zufallsvariablen auf dem Ereignisraum  $(\Omega, \mathcal{A})$ , die nur die Werte  $-1, +1$  annehmen, d.h. für alle  $\omega \in \Omega$  gilt*

$$|a_0(\omega)| = |a_1(\omega)| = |b_0(\omega)| = |b_1(\omega)| = 1 \quad (2.1)$$

dann gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  die Bell-CHSH-Ungleichung

$$|\langle a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 \rangle_{\mu}| \leq 2 \quad (2.2)$$

wobei

$$\langle x \rangle_{\mu} = \int_{\Omega} x(\omega) d\mu$$

den Erwartungswert von  $x$  bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  bezeichnet.

Beweis: Sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Für alle  $\omega \in \Omega$  gilt

$$c(\omega) = a_0(\omega)b_0(\omega) + a_0(\omega)b_1(\omega) + a_1(\omega)b_0(\omega) - a_1(\omega)b_1(\omega) = \quad (2.3)$$

$$= a_0(\omega)(b_0(\omega) + b_1(\omega)) + a_1(\omega)(b_0(\omega) - b_1(\omega)) = \pm 2 \quad (2.4)$$

und daher für den Erwartungswert

$$|\langle c \rangle_{\mu}| = \left| \int_{\Omega} c(\omega) d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |c(\omega)| d\mu = \int_{\Omega} 2 d\mu = 2 \quad (2.5)$$

### Bemerkungen

1. Die Ungleichung gilt ebenfalls, wenn die Funktionen  $a_0, a_1, b_0, b_1$  Werte im abgeschlossenen Intervall  $[-1, 1]$  annehmen können.

---

<sup>1</sup>Die Annahme eines gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum ist nicht trivial. Sie liegt aber der gesamten klassischen statistischen Mechanik und der dort verwendeten Definition physikalischer Größen zugrunde.

2. Wegen (2.4) gilt auch die folgende verwandte Ungleichung

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_0(\omega_k)b_0(\omega_k) + a_0(\omega_k)b_1(\omega_k) + a_1(\omega_k)b_0(\omega_k) - a_1(\omega_k)b_1(\omega_k)) \right| \leq 2 \quad (2.6)$$

für beliebige  $n$  Einzelfälle  $\omega_1 \dots \omega_n \in \Omega$ . Es handelt sich dabei um keine wahrscheinlichkeits-theoretische Aussage, sondern um eine exakte, wobei nicht die Messbarkeit der Funktionen  $a_0, a_1, b_0, b_1$  vorausgesetzt werden muss.

### 3 Tsirelson-Ungleichung für quantenmechanische Observablen

Wenn man das Experiment im Rahmen der Quantenmechanik beschreibt, werden die vier Observablen  $A_0, A_1, B_0, B_1$  durch selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  dargestellt. Die Annahme, dass alle vier Observablen nur die Werte  $-1$  und  $+1$  annehmen können, bedeutet dann, dass das Spektrum dieser Operatoren nur diese beiden Werte umfasst.

Es gilt dann im Allgemeinen *nicht* die Bell-CHSH-Ungleichung, sondern eine schwächere Ungleichung, die sogenannte *Tsirelson-Ungleichung* (Cirel'son, 1980).

*Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und sind  $A_0, A_1, B_0, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  selbstadjungierte Operatoren auf  $\mathcal{H}$ , die ein Eigenwertspektrum mit den Werten  $-1, +1$  haben*

$$\sigma(A_0) = \sigma(A_1) = \sigma(B_0) = \sigma(B_1) = \{-1, +1\} \quad (3.1)$$

dann gilt für jeden Einheitsvektor  $\psi \in \mathcal{H}$  die Tsirelson-Ungleichung

$$|\langle \psi, (A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 - A_1B_1)\psi \rangle| \leq 2\sqrt{2} \quad (3.2)$$

Gelten die Vertauschungsrelationen

$$[A_0, B_0] = [A_0, B_1] = [A_1, B_0] = [A_1, B_1] = 0 \quad (3.3)$$

dann sind die Produkte  $A_0B_0, A_0B_1, A_1B_0, A_1B_1$  und auch deren Summe selbstadjungierte Operatoren und man kann das Skalarprodukt in (3.2) als Erwartungswert einer Observablen im Zustand  $\psi \in \mathcal{H}$  betrachten

$$|\langle (A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 - A_1B_1)\rangle_\psi| \leq 2\sqrt{2} \quad (3.4)$$

Beweis: Wir beweisen nur den physikalisch relevanten Spezialfall (3.4) (Landau, 1987). Jeder selbstadjungierte Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit dem Spektrum  $\sigma(A) = \{-1, +1\}$  kann in der Form  $A = 2P - 1$  geschrieben werden mit einem Projektionsoperator  $P = P^\dagger = P^2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Daraus folgt  $A^2 = 1$  und  $\|A\| = 1$ . Einfaches Ausmultiplizieren und Anwendung von (3.3) ergibt dann für  $C = A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 - A_1B_1$

$$C^2 = 4 + [A_0, A_1][B_0, B_1] \quad (3.5)$$

Daraus folgt aber die Abschätzung

$$\|C\| \leq \sqrt{4 + \| [A_0, A_1][B_0, B_1] \|} \quad (3.6)$$

Mit  $\|A_0\| = \|A_1\| = \|B_0\| = \|B_1\| = 1$  und  $\| [A_0, A_1][B_0, B_1] \| \leq 4$  ergibt sich dann

$$\|C\| \leq \sqrt{8} \quad (3.7)$$

Daraus folgt aber wegen  $|\langle \psi, C\psi \rangle| \leq \|C\|$  für alle Einheitsvektoren  $\psi \in \mathcal{H}$  die Tsirelson-Ungleichung.

## Bemerkungen

1. Die Ungleichung gilt auch für Mischungen, da sie für alle Komponenten einer Mischung gilt. Daher gilt für beliebige statistische Operatoren  $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$|\text{tr}(WC)| \leq 2\sqrt{2} \quad (3.8)$$

2. Kommutieren *alle* Operatoren paarweise, kann die Ungleichung zur Bell-CHSH-Ungleichung verschärft werden:

$$\begin{aligned} [A_0, B_0] = [A_0, B_1] = [A_1, B_0] = [A_1, B_1] = [A_0, A_1] = [B_0, B_1] = 0 \\ \Rightarrow |\langle C \rangle_{\psi}| \leq 2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

wie man an (3.6) sofort sieht.

3. Eine notwendige Bedingung für die *Verletzung* der Bell-CHSH-Ungleichung, d.h.  $|\langle C \rangle_{\psi}| > 2$  ist also

$$[A_0, A_1][B_0, B_1] \neq 0 \quad (3.10)$$

Wie Landau (1987) zeigt, ist diese Bedingung auch hinreichend. Der Eigenvektor von  $C$  zum größten Eigenwert ist ein geeigneter Zustand des Systems.

4. Die Vertauschungsrelationen (3.3) sind natürlich dann erfüllt, wenn das System  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  aus zwei Teilsystemen  $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  zusammengesetzt ist, sodass

$$A_0 = A_{0,A} \otimes 1_B, A_1 = A_{1,A} \otimes 1_B, B_0 = 1_A \otimes B_{0,B}, B_1 = 1_A \otimes B_{1,B} \quad (3.11)$$

5. In einem zusammengesetzten System gilt aber für alle Produktzustände  $\psi_A \otimes \psi_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$|\langle (A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 - A_1B_1) \rangle_{\psi_A \otimes \psi_B}| \leq 2 \quad (3.12)$$

denn  $\langle \psi_A \otimes \psi_B, (AB)\psi_A \otimes \psi_B \rangle = \langle \psi_A, A\psi_A \rangle \langle \psi_B, B\psi_B \rangle$ . Da diese Erwartungswerte im Intervall  $[-1, 1]$  liegen, gilt für die Produkte immer die Bell-CHSH-Ungleichung.

6. In einem zusammengesetzten System ist daher das Vorliegen eines *verschränkten* Zustands eine notwendige Bedingung für die Verletzung der Bell-CHSH-Ungleichung.

## 4 Verletzung der Bell-CHSH-Ungleichung an quantenmechanischen Systemen

Die Tsirelson-Ungleichung lässt es für Quantensysteme zu, dass Erwartungswerte auf der linken Seite stehen, die größer als 2 sind und somit die Bell-CHSH-Ungleichung verletzen. Wir werden jetzt ein solches Beispiel konstruieren.

## 4.1 ... in der Theorie

Wir betrachten ein aus zwei Spin-1/2-Teilchen zusammengesetztes System in dem Hilbertraum<sup>2</sup>  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Die folgenden Matrizen aus  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  sind selbstadjungiert und haben die Eigenwerte  $\{-1, +1\}$ :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Z)$$

Sie stellen die Observablen für die Spinkomponente eines Spin-1/2-Teilchens in unterschiedlichen Raumrichtungen dar:  $x$ -Richtung,  $z$ -Richtung und  $\pm 45^\circ$  in der  $x$ - $z$ -Ebene.

Wir betrachten jetzt am zusammengesetzten System den verschränkten Zustand

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{z+} \otimes \varphi_{z-} - \varphi_{z-} \otimes \varphi_{z+})$$

wobei  $\varphi_{z+}, \varphi_{z-} \in \mathbb{C}^2$  die Eigenzustände von  $Z$  darstellen mit

$$Z\varphi_{z+} = \varphi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$Z\varphi_{z-} = -\varphi_{z-} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

sowie die Observablen

$$A_0 = X \otimes 1$$

$$A_1 = Z \otimes 1$$

$$B_0 = 1 \otimes U$$

$$B_1 = 1 \otimes V$$

Diese Observablen haben natürlich ebenfalls die Eigenwerte  $\{+1, -1\}$  und erfüllen die Vertauschungsrelationen, sodass die Produkte  $A_0B_0, A_0B_1, A_1B_0, A_1B_1$  ebenfalls Observablen definieren. Für die Erwartungswerte im Zustand  $\psi$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \psi, A_0B_0\psi \rangle &= \langle \psi, X \otimes U\psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi_{z+} \otimes \varphi_{z-} - \varphi_{z-} \otimes \varphi_{z+}, X\varphi_{z+} \otimes U\varphi_{z-} - X\varphi_{z-} \otimes U\varphi_{z+} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (-\langle \varphi_{z-}, U\varphi_{z+} \rangle - \langle \varphi_{z+}, U\varphi_{z-} \rangle) = \frac{1}{2} \left( +\frac{1}{\sqrt{2}}1 + \frac{1}{\sqrt{2}}1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und analog

$$\langle \psi, A_0B_1\psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

<sup>2</sup>Wir betrachten nur die Spinkomponenten, nicht die Ortskomponenten.

$$\begin{aligned}\langle \psi, A_1 B_0 \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \psi, A_1 B_1 \psi \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

und daher insgesamt

$$\langle (A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1) \rangle_{\psi} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,8 \quad (4.3)$$

Das bedeutet aber, die Erwartungswerte im Zustand  $\psi$  verletzen die Bell-CHSH-Ungleichung, denn es gilt

$$|\langle (A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1) \rangle_{\psi}| > 2 \quad (4.4)$$

Dieses Beispiel zeigt aber auch, dass die *Tsirelson-Schranke*  $2\sqrt{2}$  in der Quantenmechanik tatsächlich erreicht wird und somit im allgemeinen Fall keine stärkere Ungleichung angegeben werden kann.

## 4.2 ... im Experiment

Die von Bell errechnete Verletzung der Bell-CHSH-Ungleichung durch quantenmechanische Systeme wurde vielfach experimentell bestätigt. Am bekanntesten sind die Photonen-Experimente von Aspect *et al.* (1982), in denen dies erstmalig schlüssig nachgewiesen wurde. Mittlerweile ist eine Vielzahl unterschiedlicher Varianten mit verschiedenen Teilchen getestet worden.

# 5 Einige einfache Folgerungen

## 5.1 Unmöglichkeit des Werterealismus für alle Observablen

Die Bell-CHSH-Ungleichung wäre auch dann erfüllt, wenn die vier Observablen  $A_0, A_1, B_0, B_1$  immer - auch ohne Messung - einen Wert  $-1$  oder  $+1$  hätten, der durch die Messung einfach "abgelesen" wird. Offensichtlich ist dies in dem oben behandelten verschränkten Zustand nicht der Fall: Es ist ausgeschlossen, dass die Observablen  $A_0, A_1, B_0, B_1$  im Zustand  $\psi$  unabhängig von einer Messung einen definierten Wert haben, der bei einer Messung unverändert abgelesen wird, sonst könnte (4.3) nicht gelten. In diesem Sinne ist die Quantenmechanik keine *realistische* Theorie: Die Werte der Observablen können i.A. nicht unabhängig von der Messung bestehen.

Dies ist ein ähnliches Resultat, wie es die Theoreme von v. Neumann, Gleason und Kochen-Specker nahelegen<sup>3</sup>

## 5.2 Inkompatibilität zwischen Quantenmechanik und klassischer Wahrscheinlichkeitstheorie

Die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie ist offensichtlich nicht ohne weiteres kompatibel mit der Quantenmechanik. Die vier im Experiment gemessenen Größen  $A_0, A_1, B_0, B_1$  können zwar als quantenmechanische Observablen behandelt werden, aber nicht als Funktionen auf dem Phasenraum der

---

<sup>3</sup>Mit dem Unterschied, dass dies hier nur für solche Zustände gefolgt werden kann, die die Bell-CHSH-Ungleichung verletzen.

klassischen statistischen Mechanik, d.h. als Zufallsvariablen auf *einem* Wahrscheinlichkeitsraum<sup>4</sup>, denn dann müsste die Bell-CHSH-Ungleichung für alle Zustände erfüllt werden.

## 6 Lokalität und Bell-CHSH-Ungleichung

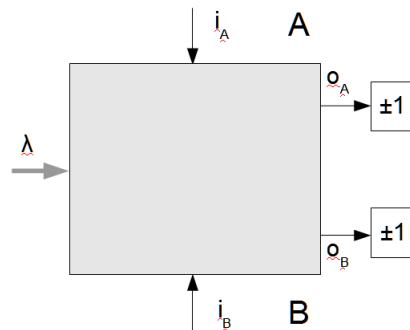
Aber diese Folgerungen waren Bell schon durch andere Gegebenheiten bekannt (vgl. Bell, 1966) und nicht der wesentliche Punkt, der zu seinem Theorem führte. Das wichtige neue Resultat war die Nicht-Lokalität aller realistischen Theorien, die die quantenmechanischen Ergebnisse erklären können. Dabei dachte Bell an Theorien wie die Bohmsche Mechanik, die einen eigenen Satz von realen Größen definieren, der aber nicht alle quantenmechanischen Observablen umfasst.

### 6.1 Simulation des Bell-CHSH-Experiments an einem Automaten

In einer realistischen Theorie werden die physikalischen Systeme mit Hilfe von Größen beschrieben, die unabhängig von Messungen immer einen definierten Wert haben. Zwischen den Größen existieren gewisse Abhängigkeiten, die durch Funktionen beschrieben werden.

Da der entscheidende Punkt in der Argumentation leicht übersehen wird, wollen wir ihn ausführlich darlegen, indem wir den Versuchsaufbau als Automaten behandeln, der nach den Eingaben der "Experimentatoren" jeweils "Messwerte" ausgibt. Man kann dabei an ein elektronisches Gerät (Spielautomaten) oder einen Computer denken, an dem das Experiment simuliert wird. Die "Lokalität" wird mittels der Frage untersucht, inwieweit man den Automaten in "Teilautomaten" (mehrere Kästchen statt einem) zerlegen kann und welche Datenverbindungen (Verbindungskabel) dabei benötigt werden.

Ein Automat, der das Experiment simuliert, sollte folgende Ein- und Ausgänge haben:



Die zwei Eingänge  $i_A, i_B$  stellen die Richtungsauswahl der Experimentatoren  $A, B$  dar und können jeweils zwei Werte, 0 oder 1, annehmen. Die zwei Ausgänge  $o_A, o_B$  geben die Messergebnisse wieder und können die Werte +1 oder -1 anzeigen.

Ein Eingang  $\lambda$  soll alle weiteren Parameter (Teilcheneigenschaften, unbekannte bzw. verborgene Parameter der Versuchsanordnung, innere Automatenzustände) zusammenfassen<sup>5</sup>. Wir machen keine

<sup>4</sup>Trivialerweise kann jede Messung einer einzelnen Observablen bzw. die gemeinsame Messung eines Observablenpaars als Messung von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben werden. Nur für alle vier Observablen, die ja nicht gemeinsam gemessen werden können, kann kein gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsraum angegeben werden, in dem alle Observablen als Zufallsvariablen dargestellt werden.

<sup>5</sup>Man kann diesen Parameter weiter aufteilen z.B. in  $\lambda_A, \lambda_B$  ohne etwas an den folgenden Überlegungen zu ändern. Der Parameter  $\lambda$  kann auch innere Automatenzustände  $\lambda_i$  umfassen, z.B.  $\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_i) \in \Lambda$

Annahme über den Wertebereich  $\Lambda$  an diesem Eingang (eine Möglichkeit wäre  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  wie in der klassischen statistischen Mechanik), gehen aber davon aus, dass es eine passende  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  gibt, sodass  $(\Lambda, \mathcal{A})$  ein Ereignisraum ist und wir die Wahrscheinlichkeitstheorie anwenden können<sup>6</sup>.

In einem klassischen<sup>7</sup> deterministischen Automaten gilt: *Die Ausgabe ist eine Funktion der Eingaben und des inneren Zustands des Automaten.*

In unserem Fall sind angezeigten Ausgabewerte an den beiden Ausgängen  $o_A, o_B$  also Funktionen<sup>8</sup> der Eingaben  $i_A, i_B$  und von  $\lambda$ <sup>9</sup>

$$o_A : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}, (i_A, i_B, \lambda) \mapsto o_A(i_A, i_B, \lambda) \quad (6.1)$$

$$o_B : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}, (i_A, i_B, \lambda) \mapsto o_B(i_A, i_B, \lambda) \quad (6.2)$$

## 6.2 Ablauf der Simulation

Man kann in einer Computersimulation alle Eingänge inkl.  $\lambda$  mit den Ausgängen von unabhängigen Zufallsgeneratorn verbinden. Bei jedem Durchlauf des Experiments werden dann zufällige Werte für  $\lambda$  und  $i_A, i_B$  eingegeben, anschließend wird ein Wertepaar an den Ausgängen  $o_A, o_B$  abgelesen und das Produkt  $o_A o_B$  notiert.

Je nach Eingabe für  $i_A, i_B$  kann man an den Ausgängen eines der vier Wertepaare

$$[o_A(0, 0, \lambda), o_B(0, 0, \lambda)], \dots, [o_A(1, 1, \lambda), o_B(1, 1, \lambda)]$$

(bei jeweils unbekanntem  $\lambda$ ) ablesen. Um die Ergebnisse mit der Bell-CHSH-Ungleichung zu vergleichen, ermittelt man in vielen Wiederholungen mit unterschiedlichen Eingaben die Mittelwert der Produkte

$$\overline{o_A(0, 0, \lambda)o_B(0, 0, \lambda)}, \dots, \overline{o_A(1, 1, \lambda)o_B(1, 1, \lambda)}$$

wobei die Eingaben für  $i_A, i_B$  von den Zufallsgeneratorn unabhängig und gleichverteilt generiert werden. Schließlich wird für die Bell-CHSH-Ungleichung der Mittelwert

$$\bar{c} = \overline{o_A(0, 0, \lambda)o_B(0, 0, \lambda)} - \overline{o_A(0, 1, \lambda)o_B(0, 1, \lambda)} + \overline{o_A(1, 0, \lambda)o_B(1, 0, \lambda)} + \overline{o_A(1, 1, \lambda)o_B(1, 1, \lambda)} \quad (6.3)$$

berechnet und als Messwert bzw. Schätzwert des theoretischen Erwartungswertes betrachtet.

**Beispiel** Mit  $\Lambda = \{0, 1\}$  könnte ein einfacher Automat durch die folgenden Funktionen definiert werden

$$o_A(i_A, i_B, \lambda) = 2i_A - 1 \quad (6.4)$$

$$o_B(i_A, i_B, \lambda) = (1 - 2i_B)(2\lambda - 1) \quad (6.5)$$

Die Wertetabelle zeigt 8 Wiederholungen des Experiments mit diesem Automaten

---

<sup>6</sup>Ein Bedingung, die in endlichen Automaten trivialerweise stets erfüllt ist.

<sup>7</sup>Quantenschaltkreise (quantum circuits), wie sie in Quantencomputern Verwendung finden, müssen an dieser Stelle explizit ausgeschlossen werden.

<sup>8</sup>wobei wir die  $\mathcal{A}$ -Messbarkeit der Funktionen voraussetzen.

<sup>9</sup>oedA werden innere Automatzustände zu  $\lambda$  gezählt

Nr.	$i_A$	$i_B$	$\lambda$	$o_A$	$o_B$	$o_A o_B$
1	0	0	0	-1	1	-1
2	0	1	0	-1	-1	1
3	1	0	0	1	1	1
4	1	1	0	1	-1	-1
5	0	0	1	-1	-1	1
6	0	1	1	-1	1	-1
7	1	0	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1

und allen möglichen Eingabekombinationen. Dabei ergibt sich  $\bar{c} = 0$ , was bei einer großen Anzahl von Wiederholungen mit zufälligen, unabhängigen und gleichverteilten Eingaben für  $i_A, i_B, \lambda$  ebenfalls angenähert herauskommen sollte.

### 6.3 Eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Bell-CHSH-Ungleichung

Immer dann, wenn die Funktionen  $o_A, o_B$  *nicht* von der Eingabe der Gegenseite abhängen, d.h. *wenn für alle*  $i_A, i_B \in \{0, 1\}$  *und alle*  $\lambda \in \Lambda$  gilt

$$o_A(i_A, 0, \lambda) = o_A(i_A, 1, \lambda) \quad (6.6)$$

$$o_B(0, i_B, \lambda) = o_B(1, i_B, \lambda) \quad (6.7)$$

können die Ergebnisse an den Ausgängen durch *vier* Funktionen von  $\lambda$  alleine (oder durch Konstanten) dargestellt werden

$$a_0 : \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}, \lambda \mapsto a_0(\lambda) = o_A(\mathbf{0}, 0, \lambda) = o_A(\mathbf{0}, 1, \lambda)$$

$$a_1 : \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}, \lambda \mapsto a_1(\lambda) = o_A(\mathbf{1}, 0, \lambda) = o_A(\mathbf{1}, 1, \lambda)$$

$$b_0 : \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}, \lambda \mapsto b_0(\lambda) = o_B(0, \mathbf{0}, \lambda) = o_B(1, \mathbf{0}, \lambda)$$

$$b_1 : \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}, \lambda \mapsto b_1(\lambda) = o_B(0, \mathbf{1}, \lambda) = o_B(1, \mathbf{1}, \lambda)$$

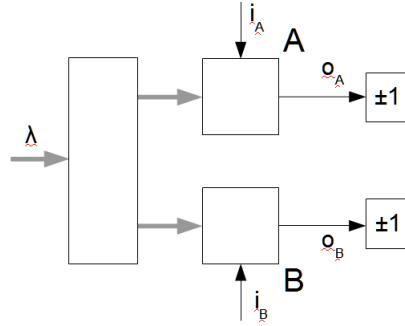
Diese Funktionen (oder Konstanten) sind aber nichts anderes als 4 Zufallsvariablen  $a_0, a_1, b_0, b_1$  auf dem Ereignisraum  $(\Lambda, \mathcal{A})$ <sup>10</sup>, die nur die Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen können, sodass der Erwartungswert

$$|\langle c \rangle_\mu| = |\langle a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 \rangle_\mu| \leq 2$$

für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\Lambda, \mathcal{A})$  die *Bell-CHSH-Ungleichung erfüllen muss*.

Den zugehörigen Automaten kann man dann immer in Teilautomaten so zerlegen, dass man *ohne* Verbindung von  $A$  nach  $B$  und  $B$  nach  $A$  auskommt, da  $o_A$  nicht von  $i_B$  und  $o_B$  nicht von  $i_A$  abhängt, wie das folgende Diagramm zeigt:

<sup>10</sup>An dieser Stelle setzen wir die Borelmessbarkeit der Funktionen voraus. Abgesehen von der Tatsache, dass zumindest bei endlichen Automaten die Funktionen immer messbar sind, zeigt 2.4, dass man den Zusammenhang auch allgemeiner, ohne messbare Funktionen, beweisen kann.



**Beispiel** Im obigen Beispiel ist diese Bedingung durch die Funktionen (6.4) erfüllt und es ergibt sich für die vier Zufallsvariablen

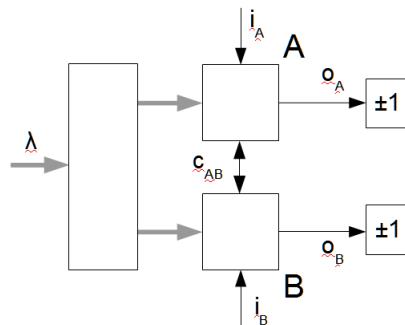
$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1$$

$$b_0 = 2\lambda - 1, \quad b_1 = 1 - 2\lambda$$

## 6.4 Eine notwendige Bedingung für die Verletzung der Bell-CHSH-Ungleichung

*Soll dagegen die Bell-CHSH-Ungleichung von einem klassischen deterministischen Automaten verletzt werden, so muss im Umkehrschluss das Ergebnis  $o_A$  auch von der Eingabe  $i_B$  abhängen oder das Ergebnis  $o_B$  von der Eingabe  $i_A$ .*

Das bedeutet aber, dass bei den Teilautomaten immer eine *Verbindung* von  $A$  nach  $B$  oder umgekehrt bestehen muss, wie sie im Schaltbild durch  $c_{AB}$  eingetragen ist (wobei eine Richtung bereits ausreicht, s.u. Beispiel).



Die Ausgänge der Schaltung können dann *nicht durch vier Zufallsvariablen auf einem Ereignisraum dargestellt werden*. Man benötigt im Maximalfall, wenn alle Ergebnisse von beiden Eingaben  $i_A, i_B$  anhängen, acht Funktionen von  $\lambda$

$$a_{0,0}(\lambda) = o_A(0, 0, \lambda), \quad a_{0,1}(\lambda) = o_A(0, 1, \lambda)$$

$$a_{1,0}(\lambda) = o_A(1, 0, \lambda), \quad a_{1,1}(\lambda) = o_A(1, 1, \lambda)$$

$$b_{0,0}(\lambda) = o_B(0, 0, \lambda), \quad b_{0,1}(\lambda) = o_B(0, 1, \lambda)$$

$$b_{1,0}(\lambda) = o_B(1, 0, \lambda), \quad b_{1,1}(\lambda) = o_B(1, 1, \lambda)$$

also acht Zufallsvariablen auf dem Ereignisraum  $(\Lambda, \mathcal{A})$ . Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\Lambda, \mathcal{A})$  gilt dann für den Erwartungswert

$$|\langle c \rangle_\mu| = |\langle a_{0,0}b_{0,0} + a_{0,1}b_{0,1} + a_{1,0}b_{1,0} - a_{1,1}b_{1,1} \rangle_\mu| \leq 4 \quad (6.8)$$

wobei der Wert 4 auch erreicht werden kann, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel** Ein maximale Verletzung der Bell-CHSH-Ungleichung wird durch folgende Funktionen generiert

$$\begin{aligned} o_A(i_A, i_B, \lambda) &= 1 \\ o_B(i_A, i_B, \lambda) &= 1 - 2i_A i_B \end{aligned}$$

Dabei gilt dann

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1, \quad a_{0,1} = 1, \quad a_{1,0} = 1, \quad a_{1,1} = 1 \\ b_{0,0} &= 1, \quad b_{0,1} = 1, \quad b_{1,0} = 1, \quad b_{1,1} = -1 \end{aligned}$$

und somit konstant  $c = 4$ .

## 6.5 Bells Theorem

Diese Überlegungen zeigen, dass es keinen klassischen, deterministischen Automaten geben kann, der für die Erwartungswerte der Ausgangsgrößen die Bell-CHSH-Ungleichung verletzt und ohne Verbindung zwischen  $A$  und  $B$  auskommt. Das gleiche Ergebnis gilt auch für stochastische Automaten (die immer durch deterministische Automaten mit zusätzlichen Eingängen für zufällige Eingaben durch *Zufallsgeneratoren*, simuliert werden können) und eben auch für alle klassisch-physikalischen Mechanismen.

In die Sprache der Physik zurückübersetzt heißt das: Es ist nicht möglich, in einer realistischen Theorie mit funktionalen Abhängigkeiten die Ergebnisse der Bell-CHSH-Experimente zu beschreiben, wenn nicht die Ergebnisse von  $A$  auch von der Auswahl von  $B$  abhängen oder umgekehrt.

Dies ergibt dann Bells Theorem: *Keine physikalische Theorie, die realistisch und lokal ist, kann in allen statistischen Aussagen mit der Quantenmechanik übereinstimmen.*

## Bemerkungen

1. Sind die Messungen und die entsprechenden Auswahlentscheidungen von  $A$  und  $B$  im Sinne der Relativitätstheorie raumartig voneinander getrennt, wie in Gisins Experimenten (Gisin *et al.*, 2008), so muss für jede realistische Theorie eine “spukhafte Fernwirkung” zwischen  $A$  und  $B$  angenommen werden, die nach den experimentellen Daten mindestens mit 10000facher Lichtgeschwindigkeit übertragen wird.
2. Dies führt zu der Frage, ob man nicht unter Ausnutzung dieser Effekte Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen kann. Das No-Communication-Theorem zeigt, dass dies unmöglich ist (vgl. Peres and Terno, 2004). Speziell betrachtet man dazu die quantenmechanischen Erwartungswerte der Messergebnisse von  $B$ , unter der Bedingung, dass  $A$  eine der verschiedenen möglichen Messungen (oder keine) vornimmt, und stellt fest, dass sich diese Erwartungswerte unter diesen Bedingungen nicht ändern.

3. In der Bohmschen Theorie, die Bell bei der Aufstellung des Theorems untersuchte, erfolgt die Fernwirkung instantan vermittelt durch die Wellenfunktion des Gesamtsystems, die durch Wechselwirkung mit der Versuchsapparatur, z.B. den Stern-Gerlach-Magneten, verändert wird. Die Auswahl von  $A$  schlägt sich in einer veränderten lokalen Wechselwirkung nieder, die aber die Wellenfunktion auch für  $B$  ändert und somit das Quantenpotential für das zugehörige Teilchen. In anderen realistischen Theorien (Nelsons Stochastischer Mechanik, Catichas Entropischer Dynamik) bleibt der Fernwirkungsmechanismus unklar. Alle Wahrscheinlichkeiten folgen einfach den jeweiligen Gesetzen, die die gleichen Resultate liefern wie die QM.
4. Die Verletzung der Bellschen Ungleichung ohne Wechselwirkung zwischen entfernten Teilsystemen ist eine besondere Eigenschaft der QM. Im Zusammenhang mit Bells Theorem wird oftmals formuliert, dass die QM nicht-lokal sei. Dies hängt natürlich von der Definition von Lokalität und der Interpretation der Wellenfunktion ab. Nicht-lokale Korrelationen zwischen Teilsystemen mit einer gemeinsamen Vergangenheit gibt es auch in klassischen Theorien. Akzeptiert man die der QM zugrundeliegende (nicht-realistische) verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitstheorie, so kann man auch die QM als lokale Theorie verstehen, die ohne Wechselwirkung zwischen  $A$  und  $B$  eben Korrelationen bis zur Tsirelsonschen Schranke zulässt. Mit Wechselwirkung zw.  $A$  und  $B$ , genauer mit einer unitären Transformation im Produkthilbertraum, die kein Produkt von unitären Transformationen der Faktorhilberräume ist, kann auch ein Quantenautomat die Tsirelsonschen Schranken bis zum Wert 4 überschreiten.
5. Bei den Folgerungen, die zu Bells Theorem führen, wird stillschweigend eine weitere Voraussetzung gemacht, nämlich dass  $A$  und  $B$  unabhängig - voneinander und von den Teilchen bzw.  $\lambda$  - ihre Auswahl treffen können. Automatentheoretisch ist dies kein Problem, metaphysisch lässt sich allerdings der Einwand formulieren, dass in einer vollständig determinierten Welt diese Unabhängigkeit nicht gegeben sein muss, zumal  $\lambda$  verborgene, unbeobachtbare Parameter umfasst. Diese Einschränkungen der Wahlmöglichkeiten der Experimentatoren bezeichnet man auch als *Superdeterminismus*. Damit ist möglich, die Bellsche Ungleichung auch ohne 'reale' Fernwirkung zu verletzen, wenn die gemeinsame Determination die notwendigen Abhängigkeiten der Eingabewerte von  $A$  und  $B$  erzeugt. Im obigen Beispiel mit "lokalen" Funktionen (6.4) liefern aufeinander abgestimmte Werte von  $\lambda$  und  $i_A, i_B$  nach der folgenden Tabelle einen Wert von  $c = -4$ , selbst wenn die Eingaben für  $i_A$  und  $i_B$  untereinander stochastisch unabhängig sind.

$i_A$	$i_B$	$\lambda$	$o_A$	$o_B$	$o_{AOB}$
0	0	<b>1</b>	-1	-1	1
0	1	0	-1	-1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	-1	-1

Die Frage bleibt allerdings, ob man in einem solchen Fall noch von Lokalität sprechen sollte, denn indirekt über  $\lambda$  hängen die Ergebnisse dann nicht-lokal von  $i_A, i_B$  ab.

In Experimenten wurde dieses Thema insofern aufgegriffen, als dass man die Richtungentscheidungen in Abhängigkeit von interstellaren Photonen getroffen hat, deren Emission Jahrhunderte zurücklag (Handsteiner *et al.* 2017). Es ist schwer vorstellbar, dass diese mit den Emissionen der irdischen Teilchenquelle korreliert sind.

# Literatur

- Aspect, A., J. Dalibard, and G. Roger (1982), Phys. Rev. Lett. **49**, doi:10.1103/PhysRevLett.49.91.
- Bell, J. S. (1964), Physics **1**.
- Bell, J. S. (1966), Rev. mod. Phys. **38**.
- Bohm, D. (1951), *Quantum Theory* (Prentice-Hall, Inc.).
- Cirel'son, B. S. (1980), Lett. Math. Phys. **4**.
- Clauser, J. F., M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt (1969), Phys. Rev. Letters **23**.
- Einstein, A., B. Podolsky, and N. Rosen (1935), Phys. Rev. **47**, doi:10.1103/PhysRev.47.777.
- Gisin, N., D. Salart, A. Baas, C. Branciard, and H. Zbinden (2008), Nature **454**, arXiv:0808.3316 .
- Handsteiner, J., A. S. Friedman, D. Rauch, J. Gallicchio, B. Liu, H. Hosp, J. Kofler, D. Bricher, M. Finks, C. Leung, A. Mark, H. T. Nguyen, I. Sanders, F. Steinlechner, R. Ursin, S. Wengerowsky, A. H. Guth, D. I. Kaiser, T. Scheidl, and A. Zeilinger (2017), Phys. Rev. Lett. **118**, 10.1103/PhysRevLett.118.060401.
- Landau, L. J. (1987), Physics Letters A **120**, doi:10.1016/0375-9601(87)90075-2.
- Peres, A. (1995), *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht).
- Peres, A., and D. R. Terno (2004), Rev. Mod. Phys. **76**, arXiv:quant-ph/0212023 .
- Shimony, A. (2016), in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, edited by E. N. Zalta (Metaphysics Research Lab, Stanford University).